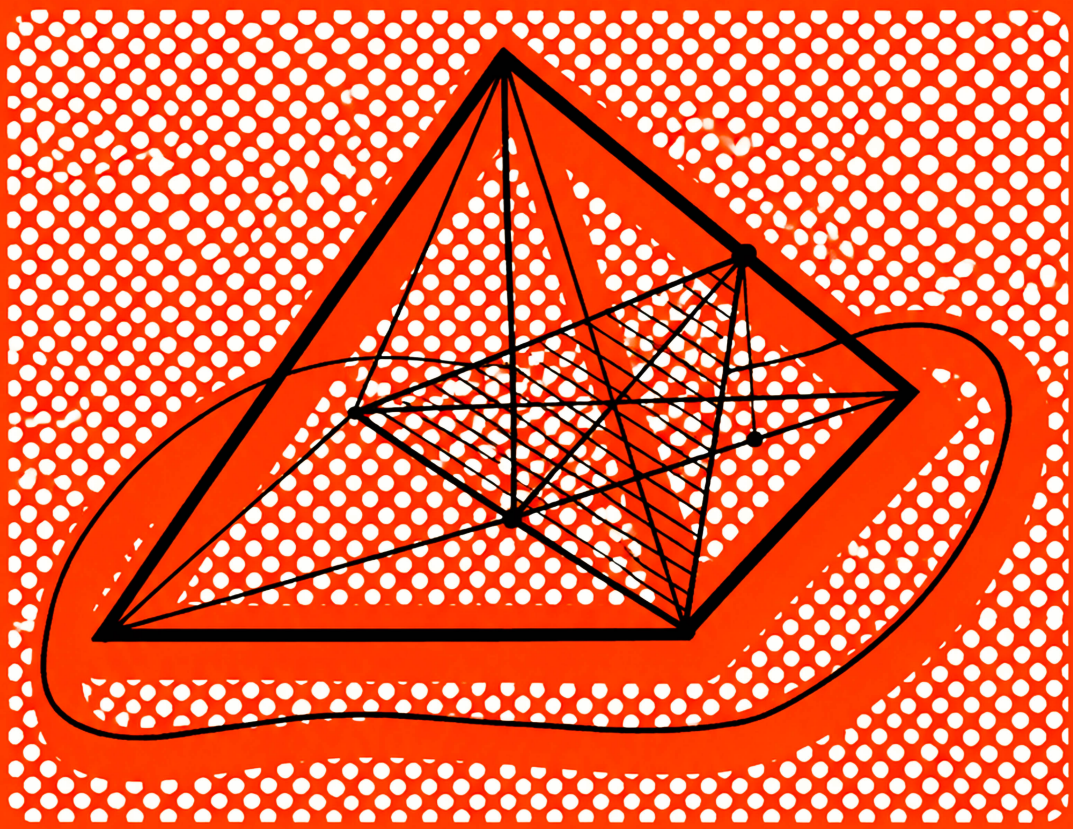
Б. И. АЛЕКСАНДРОВ
М. В. ЛУРЬЕ

ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В МГУ

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА



МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М. В. ЛОМОНОСОВА

Подготовительные курсы естественных факультетов

Б. И. Александров, М. В. Лурье

ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В МГУ

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1977

Борис Иванович Александров,
Михаил Владимирович Лурье

ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В МГУ

Редактор Р. Д. Солод
Художественный редактор Н. Ю. Калмыкова
Технический редактор З. С. Кондрашова
Корректор Г. В. Зотова

Заказная. Сдано в набор 6/IV 1976 г. Подписано к печати 11/XI 1976 г.
Формат 60 × 90¹/₁₆ Бумага тип. № 3 Физ. печ. л. 19,0 Уч.-изд. л. 17,85
Зак. 619 Тираж 16 000 экз. Цена 65 коп.

Издательство Московского университета, Москва, К-9, ул. Герцена, д. 5/7.

Московская типография № 10 Союзполиграфпрома при Государственном Комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10.

© Издательство Московского университета, 1977 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 3

Часть I

МЕТОДИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

§ 1. Методика изучения программного материала по математике учащимися заочных подготовительных курсов МГУ 5
§ 2. Литература, рабочий план, методические указания по разделам элементарной математики для учащихся заочных подготовительных курсов МГУ 7
§ 3. О подготовке к письменному экзамену по математике 35
§ 4. Контрольные задания для учащихся заочных курсов 36
§ 5. Литература, рабочий план и контрольные работы по материалу, включенному в новую школьную программу по математике . . 43

Часть II

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ С РАЗБОРОМ ОТДЕЛЬНЫХ ВАРИАНТОВ

§ 1. Географический факультет, 1972 г. 48
§ 2. Географический факультет, 1973 г. 52
§ 3. Географический факультет, 1974 г. 57
§ 4. Географический факультет, 1975 г. 63
§ 5. Биолого-почвенный факультет, 1972 г. 70
§ 6. Факультет почвоведения, 1973 г. 76
§ 7. Биологический факультет, 1973 г. 80
§ 8. Факультет почвоведения, 1974 г. 87
§ 9. Биологический факультет, 1974 г. 91
§ 10. Факультет почвоведения, 1975 г. 98
§ 11. Биологический факультет, 1975 г. 10
§ 12. Геологический факультет, отделение общей геологии, 1972 г. . . 11
§ 13. Геологический факультет, отделение геофизики, 1972 г. 11
§ 14. Геологический факультет, отделение общей геологии, 1973 г. . . 12
§ 15. Геологический факультет, отделение геофизики, 1973 г. 12
§ 16. Геологический факультет, отделение общей геологии, 1974 г. . . 13
§ 17. Геологический факультет, отделение геофизики, 1974 г. 13
§ 18. Геологический факультет, отделение общей геологии, 1975 г. . . 147
§ 19. Геологический факультет, отделение геофизики, 1975 г. 15
§ 20. Химический факультет, 1972 г. 16
§ 21. Химический факультет, 1973 г. 16
§ 22. Химический факультет, 1974 г. 173
§ 23. Химический факультет, 1975 г. 179
§ 24. Физический факультет, 1972 г. 188
§ 25. Физический факультет, 1973 г. 19
§ 26. Физический факультет, 1974 г. 20
§ 27. Физический факультет, 1975 г. 21
§ 28. Факультет вычислительной математики и кибернетики, 1972 г. . . 219
§ 29. Факультет вычислительной математики и кибернетики, 1973 г. . . 22
§ 30. Факультет вычислительной математики и кибернетики, 1974 г. 23
§ 31. Факультет вычислительной математики и кибернетики, 1975 г. . . 24
§ 32. Механико-математический факультет, 1972 г. . . . . .
§ 33. Механико-математический факультет, 1973 г. 26
§ 34. Механико-математический факультет, 1974 г. 27
§ 35. Механико-математический факультет, 1975 г. 28
Ответы 29

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие представляет собой методическое руководство по математике для учащихся подготовительных курсов МГУ, готовящихся к поступлению на естественные факультеты.

Подготовка к экзаменам рассчитана на один учебный год. Учащиеся должны систематически работать над школьными учебниками, по которым необходимо повторить программу курса по математике. Никаких дополнительных знаний сверх школьной программы для поступления в Московский университет не требуется. Однако приобрести навыки решения экзаменационных задач, и особенно задач повышенной трудности, необходимых в первую очередь поступающим на факультеты с математическим уклоном, можно только в результате систематической напряженной работы.

В этой книге сформулированы основные темы для проработки, дан перечень необходимых параграфов в учебнике и список задач для решения. В конце первой части помещены контрольные задания для учащихся заочных подготовительных курсов.

Во второй части пособия приведено большое количество задач, предлагавшихся на письменных экзаменах по математике абитуриентам естественных факультетов МГУ в 1972—1975 гг. Для первого варианта каждого факультета выполнен подробный разбор, ознакомление с которым может служить ключом для решения остальных задач этого факультета. Эта часть книги должна послужить пособием для приобретения практических навыков решения задач.

Курсы рекомендуют учащимся ориентироваться на следующие учебные пособия:

1. Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х. Пособие по математике для поступающих в вузы. М., «Наука», 1971—1976.

2. Моденов П. С., Новоселов С. И. Пособие по математике для поступающих в вузы. Изд-во МГУ, 1966.

3. Лидский В. Б., Овсянников Л. В., Тулайков А. Н., Шабунин М. И. Задачи по элементарной математике. М., Физматгиз, 1963.

4. Александров Б. И., Максимов В. М., Лурье М. В., Колесниченко А. В. Пособие по математике для поступающих в вузы. Изд-во МГУ, 1972.

5. Лурье М. В., Александров Б. И. Задачи на составление уравнений. М., «Наука», 1976.

Подготовительные курсы не располагают этими пособиями и не высылают их учащимся.

Авторы

Часть I

МЕТОДИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

§ 1. МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ПРОГРАММНОГО МАТЕРИАЛА ПО МАТЕМАТИКЕ УЧАЩИМИСЯ ЗАОЧНЫХ ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫХ КУРСОВ МГУ

Изучение программного материала по математике учащимися заочных подготовительных курсов МГУ проводится по трем основным разделам: алгебра, геометрия и тригонометрия.

Работа учащегося-заочника складывается из следующих основных элементов: чтение учебников, решение задач, выполнение контрольных заданий. Основной формой обучения учащегося-заочника является самостоятельная работа над учебным материалом.

Подготовка к вступительным экзаменам на любой из факультетов МГУ является трудоемким делом; его можно успешно выполнить только при систематической и напряженной самостоятельной работе. Готовиться к экзаменам следует систематически в течение всего учебного года. Изучение курса математики в сжатые сроки перед экзаменами не даст глубоких и прочных знаний и не приведет к положительному завершению работы.

Самостоятельная работа над учебными пособиями

Самостоятельная работа над учебными пособиями является главным видом работы учащегося-заочника, и поэтому от ее организации зависит многое. Учащимся рекомендуется руководствоваться следующими положениями:

1) избрав какое-нибудь учебное пособие в качестве основного по определенной части курса математики, учащийся должен придерживаться данного пособия при изучении всей части курса или по крайней мере целого раздела. Замена одного пособия дру-

гим в процессе изучения может привести к утрате логической связи между отдельными вопросами. Для решения задач, однако, можно использовать различные источники и прежде всего те пособия, которые высылаются курсами;

2) читая учебник по математике, следует переходить к новому материалу лишь после усвоения предыдущего. Все выкладки и вычисления, так же как и соответствующие чертежи учебника, следует выполнить самому после ознакомления с данным материалом по учебнику или пособию.

Чтение учебника или учебного пособия необходимо сопровождать составлением конспекта, в котором записываются основные теоремы, их доказательства и выполняется решение типовых задач и упражнений, имеющихся после соответствующих разделов в учебнике.

Опыт показывает, что основные формулы полезно выписывать на отдельном листке, который не только поможет запомнить их, но и будет служить справочным материалом.

Решение задач

Решение задач можно начинать с разбора задач, решенных в учебнике и разобранных в пособиях, а затем переходить к самостоятельному решению задач, рекомендованных по этому разделу. Решение задач определенного типа должно продолжаться до приобретения прочных навыков в их решении. Очень полезно, если для решения всех задач отведена одна тетрадь. Это дает возможность впоследствии легко повторить пройденный материал.

Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно. В промежуточных вычислениях не следует вводить приближенные значения корней или каких-либо других выражений. Помните, что большое количество решенных задач позволит, с одной стороны, глубже понять изучаемый материал, с другой стороны, определит успех при решении подобных задач на экзамене.

Умение решать задачи приобретается длительными систематическими упражнениями. Примите за правило каждый день решать по нескольку задач на тот или иной раздел программы. Опыт решения задач необходим и для выполнения контрольных работ.

Выполнение контрольных работ

Выполнение контрольных работ учащимися подготовительных курсов и рецензирование их преподавателями преследует две цели: во-первых, осуществление курсами контроля за работой учащегося; во-вторых, оказание ему помощи в вопросах, которые ока-

зались для него непонятными. По каждой контрольной работе учащимся заочных подготовительных курсов будет выслана методическая записка, в которой дано подробное решение всех задач этой контрольной работы и приведен анализ типичных ошибок, встречавшихся при ее выполнении.

К выполнению контрольных работ по каждому разделу курса или по частям этого раздела учащийся приступает только после изучения материала, соответствующего данной части программы, ознакомившись с примерами решения задач подобного рода, приведенных в пособии.

При выполнении контрольных работ требуется, чтобы решения были записаны в тетради со всеми вычислениями и краткими объяснениями. В алгебраических примерах нужно объяснять, что из чего получается, если это необходимо, проводить проверку решений, указывать возникающие ограничения. Если по характеру задачи требуется построение чертежа, то он должен быть обоснован, аккуратно выполнен, все обозначения должны быть четкими и соответствовать условию задачи. Кроме того, требуется, чтобы чертеж был крупным. При построении графиков функций следует использовать общие методы: перенос, сдвиг и т. д.

Если в процессе решения задачи используется какая-нибудь теорема, то она должна быть названа. *«Очевидным»* считается то утверждение, которое входило в программу курса по математике и содержится в учебнике. Все геометрические утверждения должны быть строго доказаны. Не допускайте арифметических ошибок и строго контролируйте свои вычисления. Контрольные работы, выполненные без соблюдения изложенных выше правил, не засчитываются.

§ 2. ЛИТЕРАТУРА, РАБОЧИЙ ПЛАН, МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО РАЗДЕЛАМ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ ЗАОЧНЫХ ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫХ КУРСОВ МГУ

Для подготовки к вступительным экзаменам по математике учащимся рекомендуется использовать следующую литературу, применительно к которой составлено это пособие.

Основная литература

1. Кочетков Е. С., Кочеткова Е. С. Алгебра и элементарные функции, чч. I и II. М., «Просвещение», 1971—1974.

2. Киселев А. Н. Геометрия, ч. II. М., «Просвещение», 1971; а также ч. I любого года издания.

3. Барыбин К. С. Геометрия. М., «Просвещение», 1972.

Дополнительная литература

Александров Б. И., Лурье М. В. Пособие по математике для поступающих в МГУ. Изд-во МГУ, 1976.

В дальнейшем все перечисленные книги обозначаются сокращенным образом. Например, под обозначением «*Кочетковы*, ч. I» следует понимать: Кочетков Е. С., Кочеткова Е. С. Алгебра и элементарные функции, ч. I; под обозначением «*Пособие*, § 15, 3 (1)» нужно понимать: Александров Б. И., Лурье М. В. Пособие по математике для поступающих в МГУ, часть 2-я, § 15, вариант № 3, задача 1.

В каждой теме перечисляются в рекомендуемом порядке номера параграфов из учебников, который учащийся должен прочесть, и номера задач и вариантов, которые он должен решить.

Раздел I. АЛГЕБРА*

Тема 1. Действительные числа

Основные определения. Изображение действительных чисел точками на числовой оси. Запись с помощью неравенств множеств на числовой оси: отрезка, интервала, полуинтервала, полуоси. Абсолютная величина действительного числа и ее основные свойства. Геометрическая интерпретация абсолютной величины. Решение уравнений и неравенств, содержащих неизвестное в виде линейного выражения под знаком абсолютной величины.

Учебник — *Кочетковы*, ч. I, § 35—48, упражнения № 289—293, 296—299, 305—307, 316—322, 347—353; § 7, 8, упражнения № 60—74, 75—78; § 18, 25, упражнения № 207—219.

Пособие — § 4, 1 (1), 2 (1), 3 (1), 4 (1).

Указание. Рассмотрим решение уравнения, содержащего неизвестное под знаком абсолютной величины.

Решить уравнение:

$$|x-3|-|2x+4|=2. \qquad (1)$$

Решение. Определение абсолютной величины гласит:

$$|a|=\begin{cases} a, \text{ если } a\geqslant 0; \\ -a, \text{ если } a<0. \end{cases}$$

* Общий объем требований по математике, предъявляемых к поступающим в МГУ, определяется ежегодно издаваемой общей для всех высших учебных заведений «Программой вступительных экзаменов для поступающих в высшие учебные заведения СССР».

В предлагаемой учащимся курсов рабочей программе отмечены лишь наиболее трудоемкие и имеющие первостепенное значение для решения задач вопросы из этой программы.

Поэтому определим точки, в которых хотя бы одно из выражений, стоящих под знаком модуля, равно нулю. Это будут числа 3 и —2. Точки —2 и 3 делят все числа на три области, в каждой из которых уравнение (1) можно записать без знака модуля. Рассмотрим возможные случаи.

1. Будем искать те решения уравнения (1), которые удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x \geqslant 3, \\ (x-3)-(2x+4)=2. \end{cases}$$

Уравнение в этом случае имеет решение $x=-9$. Однако это значение не удовлетворяет ограничению $x \geqslant 3$, при котором были опущены знаки модуля. Поэтому $x=-9$ не является решением уравнения (1).

2. Будем искать те решения уравнения (1), которые удовлетворяют системе

$$\begin{cases} -2 \leqslant x < 3, \\ -(x-3)-(2x+4)=2. \end{cases}$$

Решение уравнения имеет вид $x=-1$. Оно удовлетворяет неравенству $-2 \leqslant x < 3$, при условии которого последнее уравнение получается из исходного. Поэтому $x=-1$ есть решение уравнения (1).

3. Рассмотрим, наконец, область $x<-2$. Имеем систему

$$\begin{cases} x < -2, \\ -(x-3)+(2x+4)=2. \end{cases}$$

Решение уравнения этой системы $x=-5$ удовлетворяет неравенству $x<-2$ и потому является решением и уравнения (1).

Ответ: $x_1=-1$, $x_2=-5$.

Тема 2.
Линейные уравнения и неравенства

Тождества и уравнения. Неравенства, их основные свойства. Строгие и нестрогие неравенства. Двойные неравенства. Линейные уравнения и неравенства.

Учебник — *Кочетковы*, ч. I, § 1, 2, упражнения № 1—5, 13; § 9 — 15, упражнения № 79—116; § 3, упражнения 15—25; § 4, упражнения № 26—39, 50—56; § 17, упражнения № 133—139; § 20 (обратить особое внимание), упражнение № 152; § 21, упражнения № 154—164, 179—183.

Тема 3.
Системы линейных уравнений

Исследование системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Определители системы, правило Крамера. Графическая интерпретация решения системы. Равносильность систем уравнений.

Учебник — *Кочетковы*, ч. I, § 26—34, упражнения № 220—222, 223, 229—232, 234, 236—240, 241, 247—252, 257, 283—286.

Указания. Приведем основные результаты исследования вопроса о существовании и числе решений системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2, \end{cases}$$

где a_1, b_1, a_2, b_2, c_1 и c_2 — коэффициенты, действительные числа.

Классификация решений системы линейных уравнений связана с численными значениями трех определителей:
главного:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1b_1 \\ a_2b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-b_1a_2$$

и двух частных:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1b_1 \\ c_2b_2 \end{vmatrix}=c_1b_2-b_1c_2;\ \Delta_y=\begin{vmatrix} a_1c_1 \\ a_2c_2 \end{vmatrix}=a_1c_2-c_1a_2.$$

Возможны следующие случаи:

1. *Решение единственное:* $\Delta\neq0$.

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

Эти формулы называются формулами Крамера.

2. *Решение неединственное или решений нет (система несовместна):* $\Delta=0$.

Здесь возможны такие подслучаи:

а) $\Delta=0$, но один из частных определителей Δ_x или Δ_y отличен от нуля: $\Delta_x\neq0$ или $\Delta_y\neq0$. *Система несовместна;*

б) $\Delta=0$ и $\Delta_x=\Delta_y=0$ и по крайней мере один из коэффициентов при неизвестных x или y отличен от нуля. *Система уравнений имеет бесчисленное множество решений;*

в) $\Delta=0$, $\Delta_x=\Delta_y=0$ и все коэффициенты системы равны нулю. *Система имеет бесчисленное множество решений;*

г) $\Delta=0$, $\Delta_x=\Delta_y=0$, все коэффициенты при неизвестных x и y равны нулю, но хотя бы одно из чисел c_1 или c_2 отлично от нуля. *Система не имеет решений.*

Рассмотренные случаи допускают следующую *геометрическую интерпретацию:* каждое уравнение системы линейных уравнений

можно рассматривать как уравнение прямой на плоскости, конечно, если хотя бы один из коэффициентов при неизвестных x или y отличен от нуля. Поэтому первый случай, когда $\Delta \neq 0$, означает, что прямые пересекаются (рис. 1). Второй случай: $\Delta = 0$, но $\Delta_x \neq 0$ или $\Delta_y \neq 0$ означает, что прямые параллельны (рис. 2,а). Случай 2,б эквивалентен совпадению прямых (рис. 2,б). Если все коэффициенты в системе уравнений равны нулю, то вся плоскость (x, y) служит решением системы уравнений, т. е. любая пара чисел x и y является ее решением. В случае 2,г ни одна точка плоскости не является решением системы. Следует отметить, что случаю 2,б удовлетворяет такая ситуация, когда равны нулю все коэффициенты в одном из уравнений системы. Тогда первому уравнению удовлетворяют координаты точек прямой, которую представляет это уравнение. Поэтому решениями системы будут служить координаты точек этой прямой.

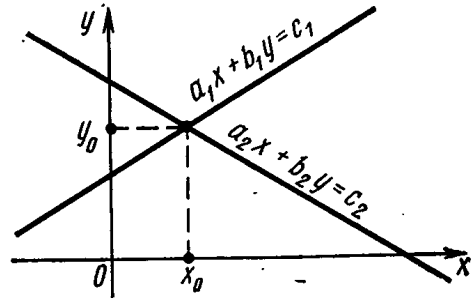


Рис. 1.

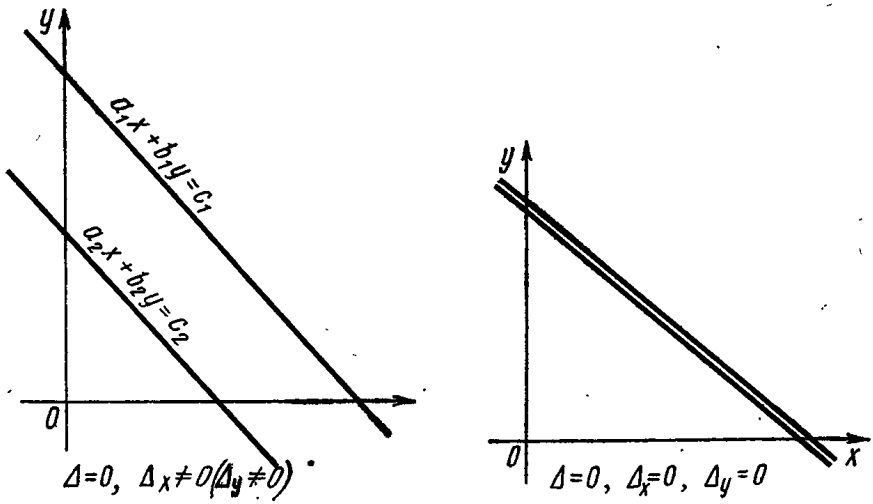


Рис. 2.

Пример. Исследовать систему уравнений

$$\begin{cases} x+2ay=1, \\ (a-1)x+4y=2a-3. \end{cases}$$

Решение. Вычислим главный определитель этой системы

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2a\\ a-1 & 4\end{vmatrix}=2(2+a-a^2).$$

Если этот определитель отличен от нуля, то решение системы единственное. Таким образом, если $a^2-a-2\neq 0$, т. е. $a\neq 2$ и $a\neq -1$, находим

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{4+6a-4a^2}{2(2+a-a^2)},\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{a-2}{2(2+a-a^2)}.$$

Здесь Δ_x и Δ_y — частные определители:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}1 & 2a\\ 2a-3 & 4\end{vmatrix}=4+6a-4a^2,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}1 & 1\\ a-1 & 2a-3\end{vmatrix}=a-2.$$

Если $a=2$ или $a=-1$, то главный определитель системы уравнений равен нулю и единственного решения нет.

Если $a=2$, то легко видеть, что равны нулю и оба частных определителя: $\Delta_x=0$ и $\Delta_y=0$. Поскольку в этом случае среди коэффициентов системы, стоящих при x или y, есть коэффициенты, отличные от нуля, то система имеет бесчисленное множество решений, связанных соотношением

$$x+4y=1.$$

Если $a=-1$, то частные определители отличны от нуля и система не имеет решений.

В качестве задач для самостоятельного решения предлагаем решить следующие задачи, взятые из экзаменационных вариантов МГУ.

Задачи.

1. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases}2x+ay=a+2,\\ (a+1)x+2ay=2a+4\end{cases}$$

имеет бесконечно много решений?

Ответ: при $a=3$.

2. Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases}2x+a^2y=a^2+a-2,\\ x+2y=2\end{cases}$$

не имеет решений.

Ответ: при $a=-2$.

3. При каких значениях a система

$$\begin{cases}a^2x+(2-a)y=4+a^2,\\ ax+(2a-1)y=a^2-2\end{cases}$$

не имеет решений?

Ответ: при $a=1$.

4. Числа a, b и c таковы, что система

$$\begin{cases} ax-by=2a-b, \\ (c+1)x+cy=10-a+3b \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений, причем $x=1$, $y=3$ — одно из этих решений. Найти числа a, b и c.

Ответ: $a=0$, $b=0$, $c=9/4$; $a=2$, $b=-1$, $c=1$.

5. При каких значениях a и b система

$$\begin{cases} ax+y=b, \\ x-y=2 \end{cases}$$

имеет единственное решение, не имеет решений, имеет бесконечно много решений?

Ответ: при $a\neq -1$ единственное решение; при $a=-1$, $b\neq -2$ система не имеет решений; при $a=-1$, $b=-2$ система имеет бесконечно много решений.

Тема 4. Квадратный трехчлен

Основное преобразование. Квадратные уравнения. Теорема Виета. Исследование знаков корней квадратного трехчлена по его коэффициентам. График квадратной функции. Различные случаи расположения параболы по отношению к оси OX. Квадратные неравенства. Решение квадратных уравнений и неравенств, содержащих неизвестное под знаком абсолютной величины.

Учебник — *Кочетковы*, ч. I, § 49—51, 52—54, 57—62, упражнения № 354—356, 386—390, 391—406, 413—427, 428—430, 434—449; на упражнения № 451—455 обратить особое внимание.

Указания. К вопросам, связанным с исследованием квадратного трехчлена, приводит большинство экзаменационных задач. В некоторых из таких задач возникает необходимость провести анализ корней квадратного уравнения по его коэффициентам. Рассмотрим пример такого анализа.

Пример. Найти все значения параметра a, при которых корни уравнения

$$(a-2)x^2-2ax+2a-3=0$$

действительны, и определить знаки корней.

Решение. Если $a=2$, то данное уравнение является линейным, имеет один корень, равный 1/4.

При $a \neq 2$ данное уравнение имеет действительные корни, если дискриминант квадратного трехчлена неотрицателен:

$$a^2-(a-2)(2a-3) \geqslant 0$$

или

$$a^2-7a+6 \leqslant 0,$$

откуда находим

$$1 \leqslant a \leqslant 6; \ (a \neq 2). \qquad (1)$$

Для определения знаков корней воспользуемся теоремой Виета:

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2a}{a-2}, \\ x_1x_2=\dfrac{2a-3}{a-2}. \end{cases}$$

Корни имеют одинаковые знаки, если их произведение положительно. Если при этом положительна и сумма корней, то они оба положительны:

$$\begin{cases} x_1x_2=\dfrac{2a-3}{a-2}>0, \\ \qquad\qquad \Rightarrow x_1>0, \ x_2>0, \\ x_1+x_2=\dfrac{2a}{a-2}>0, \end{cases}$$

откуда с учетом (1) находим: $2<a \leqslant 6$. Если при этом сумма корней отрицательна, то оба корня тоже отрицательны:

$$\begin{cases} x_1x_2=\dfrac{2a-3}{a-2}>0, \\ \qquad\qquad \Rightarrow x_1<0, \ x_2<0, \\ x_1+x_2=\dfrac{2a}{a-2}<0, \end{cases}$$

откуда с учетом (1) находим: $1 \leqslant a < 3/2$.

Если корни имеют разные знаки, то произведение корней отрицательно и выполняется неравенство

$$x_1x_2=\frac{2a-3}{a-2}<0 \Rightarrow x_1>0, \ x_2<0,$$

откуда находим: $3/2<a<2$.

Наконец, если хотя бы один из корней уравнения равен нулю, то имеет место условие

$$x_1x_2=\frac{2a-3}{a-2}=0,$$

из которого находим: $a=3/2$. Поскольку при $a=3/2$ сумма корней отрицательна, то другой корень уравнения отрицателен.

Ответ: корни уравнения действительны при $1 \leqslant a \leqslant 6$. а. При $2 < a \leqslant 6$, оба корня положительны; б. При $a=2$, один положительный корень; в. При $3/2 < a < 2$, корни разных знаков; г. При $a=3/2$, один из корней равен нулю, а другой отрицателен; д. При $1 \leqslant a < 3/2$, оба корня отрицательны.

Решить задачи. Пособие, § 7, 1(5), 3(5); § 8, 1(4), 2(4), 3(4), 4(4); § 11, 1(2), 2(2), 3(2), 4(2); § 26, 1(2), 2(2), 3(2), 4(2).

Тема 5.

Рациональные уравнения и неравенства

Целая рациональная функция (многочлен). Корни многочленов. Разложение многочленов на множители. Дробно-рациональная функция. Решение рациональных неравенств методом интервалов.

Пособие, § 12, 1(4), 2(4), 3(4), 4(4); § 17, 1(1), 2(1), 3(1), 4(1).

Пример 1. Решить неравенство

$$\frac{(x-3)(x-2)^3(x+4)}{(x-6)^2(x+2)} \geqslant 0.$$

Знак этой дроби зависит от сочетания знаков составляющих ее сомножителей. Изобразим на числовой прямой точки —4, —2, 2, 3 и 6, в которых обращается в нуль хотя бы один из сомножителей, стоящих в числителе или знаменателе этой дроби (рис. 3). Тогда числовая прямая разобьется на 6 областей, в каждой из которых все сомножители и, значит, вся дробь сохраняют определенный знак. Рассмотрим каждую из этих областей.

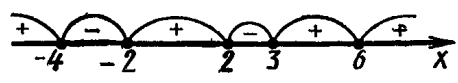


Рис. 3.

При $x>6$ все сомножители положительны (ставим в этой области знак «+»). При переходе в соседнюю область через точку 6 все сомножители сохраняют знаки потому, что скобка $(x-6)$ входит в эту дробь в четной степени (поэтому в области $3<x<6$ тоже нужно поставить знак «+»). При дальнейшем движении влево по числовой оси, при переходе от одной области к другой, знаки «+» и «—» будут чередоваться, так как каждый раз будет менять свой знак ровно один из сомножителей. Поэтому имеем

Ответ: $x \leqslant -4$, $-2 < x \leqslant 2$; $3 \leqslant x < 6$; $x > 6$.

Пример 2. Решить неравенство

$$\frac{1}{x^2-3x+2} > \frac{1}{x^2-7x+12}$$

11033—1

Запишем это неравенство в следующем виде:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)}-\frac{1}{(x-3)(x-4)}>0,$$

$$\frac{(x^2-7x+12)-(x^2-3x+2)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}>0,$$

или

$$\frac{2(x-2{,}5)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}<0.$$

Решая это неравенство *«методом интервалов»* (см. пример 1), получаем

Ответ:

$$x<1;\ 2<x<2{,}5;\ 3<x<4.$$

Тема 6.
Иррациональные уравнения и неравенства

Понятие об арифметическом корне. График функции $y=\sqrt{x}$. Формулы

$$\sqrt{x^2}=|x|,\ \sqrt{f^2(x)}=|f(x)|.$$

Область определения иррациональных выражений. Равносильность уравнений и неравенств. Преобразования, сохраняющие равносильность. Основные особенности решения иррациональных уравнений и неравенств. О необходимости проверки. Решение иррациональных уравнений и неравенств и систем уравнений и неравенств.

Учебник — *Кочетковы,* ч. I, § 65, 66, упражнения № 471—482, 503—505.

Пособие, § 13, 1(3), 2(3), 3(3), 4(3); § 16, 1(1), 2(1), 3(1), 4(1); § 18, 1(5), 2(5), 3(5), 4(5); § 31, 1(1), 3(1), 4(1).

Указания. При решении иррациональных уравнений и неравенств имеются два основных вопроса, на которые следует обратить особое внимание. Один из них связан с необходимостью соблюдать ограничения, налагаемые на неизвестные областью определения иррациональных функций. Следует помнить, что под знаком радикала четной степени могут стоять только неотрицательные выражения. Например, выражение

$$y=\sqrt{f(x)}$$

определено только при тех значениях x, которые удовлетворяют неравенству

$$f(x)\geqslant 0.$$

Если в задаче встречается несколько выражений подобного типа, то областью допустимых значений неизвестного, ОДЗ, будут те значения x, при которых определены все функции, входящие в задачу.

Другой вопрос, который возникает при решении иррациональных уравнений или неравенств, связан с равносильностью преобразования «возвышение в квадрат» обеих частей уравнения или неравенства. Например, совершенно очевидно, что возвышение в квадрат обеих частей верного числового неравенства $3>-5$ приведет к неверному результату, если сохранить знак неравенства в одном случае, и даст правильный результат в другом случае: $5>3$.

Таким образом, для того чтобы правильно решить задачу, необходимо выделить несколько случаев. Нужно помнить, что если обе части неравенства или уравнения неотрицательны, то возвышение в квадрат обеих частей этого уравнения или неравенства с сохранением данного знака между ними приводит к равносильной задаче.

В общем случае решение неравенства

$$f(x)\geqslant g(x), \tag{1}$$

связанное с возвышением в квадрат обеих его частей, распадается на следующие случаи:

а) $$\begin{cases} f(x)\geqslant 0, \\ g(x)\geqslant 0, \\ f^2(x)\geqslant g^2(x), \end{cases} \tag{2}$$

+ОДЗ функций $f(x)$ и $g(x)$.

б) $$\begin{cases} f(x)\geqslant 0, \\ g(x)<0. \end{cases} \tag{3}$$

Очевидно, что случай, когда $f(x)<0$, а $g(x)\geqslant 0$, не даст решений. Таким образом, все решения неравенства (1) получаются из решений систем (2) и (3).

Пример. Решить неравенство

$$\sqrt{x+3}>x-9.$$

Решение. Область допустимых значений в этой задаче определяется неравенством $x \geqslant -3$.

Возвести в квадрат обе части исходного неравенства было бы ошибкой, так как неизвестно, какой знак имеет его правая часть. Для $x \geqslant 9$ получилось бы неравенство, равносильное исходному, но при $-3 \leqslant x < 9$ результат мог бы быть неверным.

Рассмотрим два случая.

1) $x \geqslant 9$.

Имеем систему неравенств

$$\begin{cases} x \geqslant 9, \\ x + 3 > (x-9)^2, \end{cases}$$

решения которой имеют вид $9 \leqslant x < 13$.

2) $-3 \leqslant x < 9$.

Здесь нельзя возводить обе части неравенства в квадрат, поскольку его правая часть отрицательна. Но очевидно, что для тех x, для которых правая часть отрицательна, а левая часть больше или равна нулю, неравенство выполнено. Таким образом, в этом случае неравенство имеет следующие решения: $-3 \leqslant x < 9$.

Решениями исходного неравенства являются решения обоих случаев. Объединяя эти множества, получим

Ответ: $-3 \leqslant x < 13$.

Тема 7.
Показательная и логарифмическая функции

Степени с рациональными показателями; степени с иррациональными показателями. Основные действия со степенями. Показательная функция и ее график. Свойства показательной функции. Различия в свойствах показательной функции с основанием, большим единицы, и показательной функции с основанием, меньшим единицы; монотонность показательных функций. Решение показательных уравнений.

Логарифмическая функция и ее график. Свойства логарифмической функции. Различия в свойствах логарифмической функции с основанием, большим единицы, и логарифмической функции с основанием, меньшим единицы; монотонность логарифмических функций. Основные формулы теории логарифмов. Переход к новому основанию. Решение логарифмических уравнений.

Решение показательных и логарифмических уравнений и неравенств. Необходимость учета ограничений, связанных с областью определения логарифмической функции, и условий, гарантирую-

щих равносильность совершаемых преобразований. Решение смешанных задач, содержащих логарифмическую, показательную, рациональную и иррациональную функции.

Учебник — *Кочетковы,* ч. I, § 68—86; ч. II, § 174—177, упражнения № 1358—1362, § 178, 179, упражнения № 1365—1374; § 180—182, упражнения № 1375—1390 (на последнее упражнение надо обратить особое внимание), 1394—1399; § 183—186, упражнения № 1449—1454; § 197, упражнения № 1473—1475.

После этого нужно решить задачи: *Кочетковы* — ч. II, № 1479—1507, 1510—1514, 2194—2207, 2213.

Пособие, § 1—35 в порядке возрастания трудности.

Указания. Задачи, в которых встречается показательная и логарифмическая функции, — традиционный элемент экзаменационных вариантов по математике, предлагающихся в МГУ. Проработку этой темы нужно начать с чтения и конспектирования учебника. Вслед за этим, а частично и параллельно этому, необходимо решать задачи из рекомендованных упражнений. Только после этого нужно переходить к систематическому решению задач из настоящего пособия. На них можно проверить свои знания и приобрести опыт решения экзаменационных задач.

Независимо от того, вызвали эти задачи трудности или нет, необходимо ознакомиться с приведенными в пособии решениями и принять во внимание сделанные там методические замечания. Как правило, порядок расположения параграфов в пособии определяет порядок возрастания трудности задач.

Тема 8.
Последовательности и прогрессии

Общее определение последовательности. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Формула для общего члена последовательности. Сумма n членов арифметической прогрессии. Сумма n членов геометрической прогрессии.

Предел последовательности. Основные свойства пределов. Некоторые теоремы о существовании пределов последовательности (без доказательства). Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Учебник — *Кочетковы,* ч. I, § 127—137, упражнения № 932—938, 951, 960; упражнения № 964, 969, 971—980, 985—988, 989—996, 1001—1020.

Решить следующие задачи.

1. *Биофак, 1970.* Даны две геометрические прогрессии a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3. Известно, что числа a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3 снова образуют геометрическую прогрессию.

Доказать, что $a_1b_3=a_3b_1$.

2. *Биофак, 1970.* Даны две арифметические прогрессии a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3, причем $b_1 \neq b_2$, и $a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3$. Известно, что числа a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 также образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что $a_1=b_2$.

3. *Биофак, 1970.* Даны две геометрические прогрессии a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3. Известно, что числа a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 образуют арифметическую прогрессию и $a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3$.

Доказать, что $a_1+b_1=a_3+b_3$.

4. *Геофак, 1971.* Положительные числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 составляют геометрическую прогрессию. Сумма логарифмов этих чисел по основанию 2 равна 5. Определить эти числа, если отношение $\log_2 a_1$ к $\log_2 a_5$ равно $-5/3$.

Ответ: 32; 8; 2; 1/2; 1/8.

5. *Геофак, 1971.* Положительные числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 составляют геометрическую прогрессию. Сумма логарифмов чисел a_1, a_3, a_5 по основанию 3 равна 9. Определить числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, если $\log_3 a_4$ вдвое больше $\log_3 a_2$.

Ответ: 3, 9, 27, 81, 243.

6. *Физфак, 1973.* Сумма первых тринадцати членов арифметической прогрессии равна 130. Известно, что четвертый, десятый и седьмой члены этой прогрессии, взятые в указанном порядке, представляют собой три последовательных члена геометрической прогрессии. Найти первый член арифметической прогрессии.

Ответ: 10; 70.

Тема 9.
Задачи на составление уравнений

Рассмотреть следующие основные типы задач на составление уравнений:

задачи, связанные с понятиями «концентрация и процентное содержание»;

задачи «на движение»;

задачи, решаемые с помощью неравенств;

задачи, в которых уравнений меньше, чем неизвестных;

задачи с целочисленными неизвестными;

задачи с «альтернативными» условиями.

Подробно о каждом из этих типов задач можно прочитать в книге *М. В. Лурье и Б. И. Александрова* «Задачи на составление уравнений», выпущенной издательством «Наука» в 1976 г., а также в «Пособии по математике для поступающих в вузы» *Г. В. Дорофеева, М. К. Потапова и Н. Х. Розова.*

В качестве упражнений рекомендуется прорешать задачи на составление уравнений, имеющиеся в каждом варианте всех параграфов настоящего пособия.

Тема 10. Тригонометрические функции

Градусная и радианная мера углов и дуг. Определение основных тригонометрических функций числового аргумента. Значения тригонометрических функций от некоторых аргументов:

$$0,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{6},\ \pi,\ 2\pi \text{ и т. п.}$$

Основные тригонометрические тождества. Область определения тригонометрических функций и их свойства: четность, периодичность, монотонность и т. п. Графики основных тригонометрических функций: $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$.

Учебник — *Кочетковы*, ч. I, § 95—104, 107—111, 113—115; ч. II, § 161—164; упражнения: ч. I, стр. 217, № 645—647, 649, 650, 663, 674, 710—716, 717, 720—727, 732—740; ч. II, № 1174—1182, 1187, 1194, 1200—1202.

Тема 11. Основные тригонометрические формулы

Теоремы сложения для основных тригонометрических функций. Формулы «приведения». Формулы удвоения аргумента. Формулы деления аргумента пополам. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму. Формулы преобразования суммы или разности тригонометрических функций в произведение.

Тригонометрические преобразования. Доказательство тригонометрических тождеств.

Учебник — *Кочетковы*, ч. I, § 116; ч. II, § 149—160, 169. Упражнения: ч. I, № 754—763, 770, 771; ч. II, № 1028, 1029, 1031, 1040—1042, 1056, 1066, 1070, 1099, 1100. Упражнения: № 1126, 1127, 1148, 1167—1169, 1172, 1240, 1241, 1244.

Тема 12. Простейшие тригонометрические уравнения

Определение обратных тригонометрических функций. Общие решения элементарных тригонометрических уравнений: $\sin x=a$; $\cos x=a$; $\operatorname{tg} x=a$; $\operatorname{ctg} x=a$.

Учебник — *Кочетковы*, ч. I, § 117—122, упражнения № 787—795, 798—801, 803—808, 812—822, 823—826, 829, 831, 834, 835, 845, 1037—1039, 1051, 1052, 1059, 1060, 1107—1110.

Тема 13.
Решение тригонометрических уравнений

Некоторые методы решения тригонометрических уравнений: применение основных тригонометрических формул; введение новой неизвестной; однородные уравнения; универсальная подстановка (выражение основных тригонометрических функций через тангенс половинного угла), введение вспомогательного аргумента (преобразование выражения $a\sin x+b\cos x$) и т. п.

Учебник — *Кочетковы*, ч. I, § 123, 124; ч. II, § 156, 157, 167, 169, 171. Упражнения: № 846—865, 866—878, 1222, 1227, 1230, 1232, 1254—1257, 1260—1264, 1268, 1271, 1274, 1279, 1282, 1284, 1294, 1298.

Тема 14.
Тригонометрические неравенства

Решение простейших тригонометрических неравенств типа $\sin x>a$, $\cos x\geqslant a$, $\operatorname{tg} x<a$, $\operatorname{ctg} x\geqslant a$ и т. п.

Графическая интерпретация. Сведение тригонометрических неравенств к простейшим.

Учебник — *Кочетковы*, ч. I, 126, упражнения: ч. I, № 883—887.

Указания. Для решения тригонометрических неравенств удобно использовать графическое представление тригонометрических функций или единичный круг. Как это делается, понятно из указанных выше параграфов учебника.

Предлагаем проверить справедливость записи решений следующих простейших тригонометрических неравенств.

Во всех вышеперечисленных неравенствах $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$.

В качестве дополнительных упражнений следует решить те тригонометрические неравенства, которые содержат варианты данного пособия (часть 2-я).

Неравенство	Решения
I. а) $\sin x \geqslant \frac{1}{3}$	$\arcsin \frac{1}{3} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \pi - \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi n$
б) $\sin x > -\frac{1}{4}$	$\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi n < x < \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi n$
в) $\sin x < \frac{1}{2}$	$-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6} + 2\pi n$
г) $\sin x < -\frac{1}{3}$	$-\pi - \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi n < x < \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi n$
д) $\frac{1}{3} \leqslant \sin x < \frac{1}{2}$	1) $\arcsin \frac{1}{3} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, 2) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < x \leqslant \pi - \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi n$
II. а) $\cos x \geqslant \frac{1}{3}$	$-\arccos \frac{1}{3} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \arccos \frac{1}{3} + 2\pi n$
б) $\cos x > -\frac{1}{4}$	$-\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi n < x < \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi n$
в) $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$
г) $\cos x < -\frac{1}{3}$	$\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi n$
д) $\frac{1}{3} \leqslant \cos x < \frac{1}{2}$	1. $\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x \leqslant \arccos \frac{1}{3} + 2\pi n$, 2. $-\arccos \frac{1}{3} + 2\pi n \leqslant x < -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$.
III. а) $\operatorname{tg} x \geqslant 3$	$\operatorname{arctg} 3 + \pi n \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi n$
б) $\operatorname{tg} x > -1$	$-\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$
в) $\operatorname{tg} x \leqslant 2$	$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leqslant \operatorname{arctg} 2 + \pi n$
г) $\lvert\operatorname{tg} x\rvert < 4$	$-\operatorname{arctg} 4 + \pi n < x < \operatorname{arctg} 4 + \pi n$
д) $\operatorname{tg} x \leqslant -1$	$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leqslant -\frac{\pi}{4} + \pi n$

Продолжение

Неравенство	Решения
IV. а) $\operatorname{ctg} x \geqslant 3$	$\pi n < x \leqslant \operatorname{arcctg} 3 + \pi n$
б) $\operatorname{ctg} x > -1$	$\pi n < x < \frac{3\pi}{4} + \pi n$
в) $\operatorname{ctg} x \leqslant 2$	$\operatorname{arcctg} 2 + \pi n \leqslant x < \pi + \pi n$
г) $\operatorname{ctg} x \leqslant -1$	$\frac{3\pi}{4} + \pi n \leqslant x < \pi + \pi n.$

Тема 15.
Смешанные задачи

Следует приобрести практику решения задач, в которых неизвестное содержится в аргументах сложных функций, составленных из рациональных, иррациональных, показательных, логарифмических и тригонометрических функций.

Пособие, ч. II, § 2, 1(5), 2(5), 3(5), 4(5); § 5, 1(4), 2(4), 3(4), 4(4); § 9, 1(2, 5), 2(2, 5), 3(2, 5), 4(2, 5); § 21, 1(3), 2(3), 3(3), 4(3); § 22, 1(1), 2(1), 3(1), 4(1) и другие.

Раздел III. ГЕОМЕТРИЯ

Тема 16.
Треугольники, параллелограммы, трапеции

Признаки равенства (конгруэнтности) треугольников. Аксиомы и теоремы о параллельности прямых на плоскости. Основные задачи на построение. Свойства сторон и углов параллелограмма. Свойства диагоналей параллелограмма, прямоугольника, ромба, квадрата. Теоремы о средней линии в треугольнике и трапеции. Геометрическое место точек. Основные виды геометрических мест точек.

Учебник — *Киселев,* ч. I, § 33—59, 60—69, упражнения № 1—14, стр. 40; № 15—38, стр. 41; § 70—83, 87—101, упражнения № 1—20, 21—23, 24—75, стр. 59—62.

Барыбин, глава III, стр. 38—59, упражнения: стр. 61; глава IV.

Тема 17.
Подобие треугольников и многоугольников

Соизмеримость отрезков. Свойство параллельных прямых, пересекающих стороны угла. Теоремы о подобии треугольников; признаки подобия треугольников. Теорема о свойстве биссектрисы внутреннего угла треугольника. Подобие многоугольников. Основные задачи на построение, использующие теоремы о подобии.

Метрические соотношения в треугольниках. Теорема Пифагора. Теорема косинусов.

Учебник — *Киселев*, ч. I, § 144—155, 156—165, 168—176, 181—185, 186, 187, 188—198, упражнения № 1—14, 15—20, 21—42, 43—47, стр. 137—140.

Барыбин, глава 4.

Тема 18.
Измерение площадей

Понятие о площади. Основные допущения о площадях. Площадь прямоугольника, параллелограмма, треугольника, трапеции, многоугольника.

Учебник — *Киселев*, ч. I, § 242—261, упражнения № 1—7, 9—12, 15—23, 25—28, 33, стр. 179—180.

Тема 19.
Окружность, круг, их части

Взаимное расположение прямой и окружности, двух окружностей. Вписанные углы. Вписанные и описанные треугольники и многоугольники. Четыре замечательные точки в треугольнике. Основные задачи на построение. Пропорциональные линии в круге. Длина окружности. Площадь круга.

Учебник — *Киселев*, ч. I, § 103—133, упражнения № 1—6, 7—19, 20—54, стр. 80—82, § 136—143, упражнения № 1—13, 14—48, стр. 87—89; § 199—202, 226—241, 262—268, упражнения № 8, 13, 24, 29, 32, стр. 179—180.

Тема 20.
Основные теоремы стереометрии

Взаимное расположение плоскостей в пространстве. Угол между прямой и плоскостью, угол между двумя плоскостями. Признаки параллельности плоскостей прямых и плоскостей, перпендикулярность прямой и плоскости, перпендикулярность плоскостей.

Теорема о трех перпендикулярах. Скрещивающиеся прямые. Угол и расстояние между скрещивающимися прямыми.

Учебник — *Киселев*, ч. II, § 2—48, упражнения № 5—10, стр. 25; № 12—20, стр. 26.

Барыбин, главы V и VI, упражнения к главам V и VI.

Тема 21. Пирамиды, призмы

Свойства граней и диагоналей параллелепипеда. Объем призмы. Пирамиды. Свойства сечений, параллельных основанию. Объем пирамиды. Правильная четырехугольная пирамида. Правильная треугольная пирамида. Куб. Подобие многогранников. Отношение линейных элементов в подобных многогранниках. Отношение площадей сходственных фигур в подобных многогранниках, отношение сходственных объемов.

Учебник — Киселев, ч. II, § 67—93, упражнения № 5—8, стр. 44; № 2—7, 12—15, стр. 67, 68.

Барыбин, глава VII, упражнения к главе VII.

Тема 22. Круглые тела

Поверхность цилиндра и конуса. Объем цилиндра и конуса. Поверхность шара и его частей. Объем шара и его частей.

Учебник — *Киселев*, ч. II, § 105—145, упражнения 1—12, стр. 89.

Барыбин, главы VIII, X, упражнения к главам VIII и X.

Методические замечания к решению геометрических задач

Для приобретения навыков решения геометрических задач требуется особенно много времени. Поэтому подготовку по геометрии следует начинать как можно раньше и осуществлять равномерно, параллельно с повторением других разделов программы.

Содержание программы вступительных экзаменов по геометрии и важные методические указания можно найти в «Пособии по математике для поступающих в вузы» *Г. В. Дорофеева, М. К. Потапова, Н. Х. Розова.* М., Физматгиз, 1970—1976 гг. Там же содержится определенное количество разобранных задач, иллюстрирующих те или иные особенности экзаменационных задач, предлагавшихся в МГУ.

Опыт приемных экзаменов показывает, что наибольшие трудности при решении геометрических задач вызывают стереометрические задачи, где требуется пространственное воображение и умение «ориентироваться» в соотношениях между пространственными фигурами. Не претендуя ни в какой степени на полноту охвата всех составных частей стереометрии, рассмотрим лишь некоторые из них, которые, на наш взгляд, представляют собой важные элементы, часто встречающиеся при решении разнообразных задач. К каждому из нижеследующих пунктов приведено по несколько методических задач. Они решаются очень просто, способствуя отработке приемов, необходимых для решения других, более сложных задач. Поэтому мы советуем решить эти задачи перед тем как переходить к систематической работе над экзаменационными стереометрическими задачами.

1. Правильная треугольная пирамида

На рис. 4 приведена правильная треугольная пирамида $SABC$. На этом же рисунке показаны основные элементы правильной треугольной пирамиды:

a — сторона основания пирамиды;

b — боковое ребро пирамиды;

H — высота пирамиды;

h — апофема боковой грани;

α — угол между боковым ребром и плоскостью основания; определяемый как угол между боковым ребром и его проекцией на плоскость основания;

β — угол между плоскостью боковой грани и основанием. Поскольку $SE \perp BC$, $AE \perp BC$ (E — середина CB), угол AES есть линейный угол двугранного угла между рассматриваемыми плоскостями;

γ — угол между боковым ребром пирамиды и ее высотой.

Длина отрезка AO определяется как 2/3 высоты основания пирамиды, а OE — как 1/3 этой высоты. Поэтому ясны следующие соотношения:

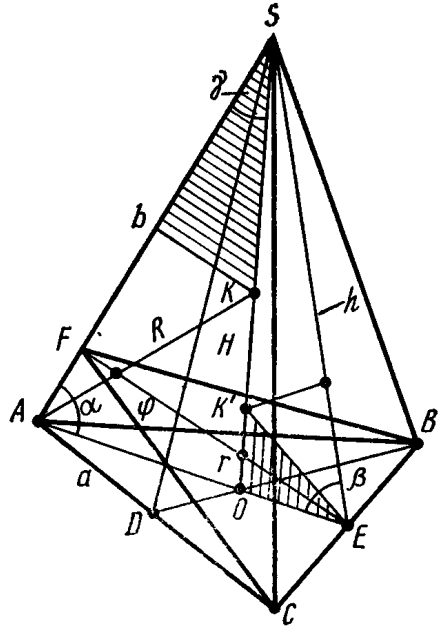


Рис. 4.

$$AO = \frac{a\sqrt{3}}{3};\ OE = \frac{a\sqrt{3}}{6};\ \alpha + \gamma = \frac{\pi}{2};$$

$$b^2 = H^2 + \frac{a^2}{3}; \quad h^2 = H^2 + \frac{a^2}{12};$$

$$b\cos\gamma = H; \; b\sin\gamma = \frac{a\sqrt{3}}{3}; \tag{1}$$

$$h\sin\beta = H; \; h\cos\beta = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Плоскости ASE и BSD, проходящие через высоту пирамиды и, следовательно, перпендикулярные основанию, играют важную роль при решении многих задач, связанных с правильной треугольной пирамидой. Каждая из этих плоскостей делит соответствующий двугранный угол между боковыми гранями пирамиды пополам, т. е. служит бисекторной плоскостью такого угла.

Двугранный угол φ между боковыми гранями пирамиды определяется из равнобедренного треугольника CFB ($FC \perp AS$ и $FB \perp AS$, $\triangle ASC = \triangle ASB$, $FC = FB$). Используя «теорему косинусов», из этого треугольника получаем

$$a^2 = 2\cdot FC^2 - 2\cdot FC^2\cdot\cos\varphi,$$

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot FC^2 - a^2}{2\cdot FC^2}. \tag{2}$$

Можно также рассмотреть прямоугольный треугольник CEF:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{a/2}{FC} = \frac{a}{2\cdot FC}. \tag{2'}$$

Высота боковой грани FC определяется весьма просто, если заметить, что

$$b\cdot FC = a\cdot h,$$

$$FC = \frac{a\cdot h}{b}. \tag{3}$$

Полезно отметить, что в правильной треугольной пирамиде скрещивающиеся ребра взаимно перпендикулярны ($AS \perp BC$, $BS \perp AC$, $CS \perp AB$, а отрезок FE есть кратчайшее расстояние между этими ребрами ($FE \perp BC$, $FE \perp AS$):

$$FE = \frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\sin\alpha. \tag{4}$$

Вокруг всякой треугольной пирамиды можно описать сферу. Центр сферы, описанной вокруг правильной треугольной пирамиды, точка K, лежит на ее высоте или на ее продолжении за точку O (это становится ясным, если учесть, что прямая OS есть геометрическое место точек, равноудаленных от вершин основания пирамиды).

Радиус описанной сферы R удобно найти из равнобедренного треугольника AKS:

$$R\cos\gamma=\frac{b}{2};\quad R=\frac{b}{2\cos\gamma}. \tag{5}$$

а) Если $R<H$, т. е. $\alpha>\frac{\pi}{4}$, центр сферы лежит внутри пирамиды;

б) если $R=H$, т. е. $\alpha=\frac{\pi}{4}$, центр сферы лежит на основании пирамиды;

в) если $R>H$, т. е. $\alpha<\frac{\pi}{4}$, центр сферы лежит вне пирамиды.

Во всякую треугольную пирамиду можно вписать шар. Центр шара, точка K', вписанного в правильную треугольную пирамиду, лежит на высоте пирамиды в точке ее пересечения с биссектрисой угла AES.

Радиус вписанного шара r удобно находить из прямоугольного треугольника $OK'E$:

$$r=\frac{a\sqrt{3}}{6}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2};\quad\left(\sin\beta=\frac{H}{h},\ \cos\beta=\frac{a\sqrt{3}}{6h}\right). \tag{6}$$

Задача 1. Правильная треугольная пирамида $SABC$, рис. 4, задана двумя элементами: a — сторона основания, H — высота. Найти все остальные элементы: α, β, γ, φ, h, b, R, r и V — объем пирамиды, а также расстояние между скрещивающимися ребрами.

Задача 2. Правильная треугольная пирамида $SABC$, рис. 4, задана двумя элементами: b — боковое ребро, φ — угол между боковыми гранями. Найти все остальные элементы: α, β, γ, h, H, a, R, r и V — объем пирамиды, EF.

Задача 3. Правильная треугольная пирамида, рис. 4, задана двумя элементами: R — радиус описанного шара, α — угол между боковым ребром и плоскостью основания. Найти все остальные элементы пирамиды: β, γ, φ, r, h, a, b, H, EF.

2. Правильный тетраэдр

Если в правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно стороне основания a, то такая пирамида называется правильным тетраэдром.

На рис. 5 изображен правильный тетраэдр. Эта фигура обладает всеми свойствами правильной треугольной пирамиды. Кроме того, полезно знать дополнительные свойства правильного тетраэдра.

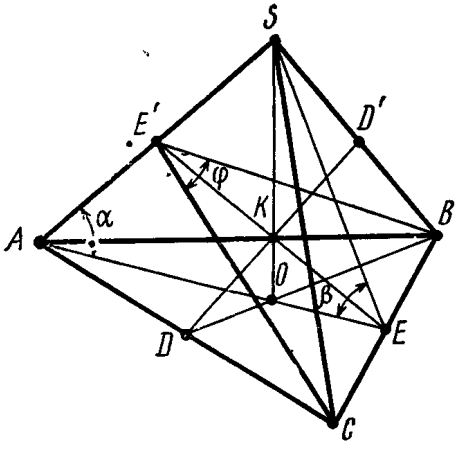


Рис. 5.

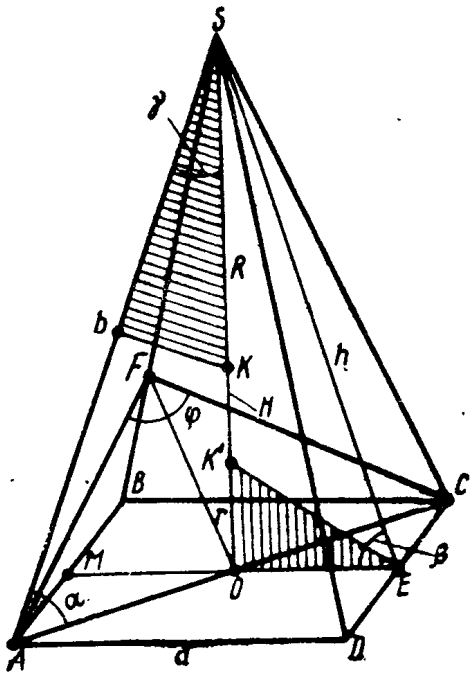


Рис. 6.

а) правильный тетраэдр имеет центр, точку K. В этом центре пересекаются все высоты тетраэдра, отрезки, соединяющие середины скрещивающихся сторон (бимедианы тетраэдра), а также в ней находятся центры вписанного и описанного шаров;

б) центр правильного тетраэдра делит его высоту в отношении 3 : 1, считая от вершины ($SK : KO = 3 : 1$);

в) радиус описанного шара составляет 3/4 высоты пирамиды, а радиус вписанного шара — 1/4 высоты пирамиды:

$$R = \frac{3}{4}H,\ r = \frac{1}{4}H;$$

г) сечения тетраэдра, параллельные скрещивающимся ребрам, представляют собой прямоугольники, а то из них, которое проведено через середину ребра — квадрат.

Задача. Пусть сторона правильного тетраэдра равна a. Проверить справедливость следующих формул:

$$H = a\sqrt{\frac{2}{3}};\quad R = \frac{3}{4}a\sqrt{\frac{2}{3}};\quad r = \frac{1}{4}a\sqrt{\frac{2}{3}};$$

$$\alpha = \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}};\ \beta = \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3};\ \varphi = \arccos\frac{1}{3}.$$

3. Правильная четырехугольная пирамида

На рис. 6 изображена правильная четырехугольная пирамида и ее основные элементы:

a — сторона квадрата, лежащего в основании пирамиды;

b — боковое ребро пирамиды;
h — апофема;
α — угол между боковым ребром и плоскостью основания;
β — угол между боковой гранью и плоскостью основания;
γ — угол между боковым ребром пирамиды и ее высотой;
φ — угол между боковыми гранями пирамиды;
R — радиус описанной сферы;
r — радиус вписанной сферы.

Нахождение большинства элементов правильной четырехугольной пирамиды похоже на нахождение соответствующих элементов правильной треугольной пирамиды. При вычислении этих элементов основную роль играют треугольники, расположенные в плоскостях симметрии пирамиды ASC, BSD, ESM, проходящих через высоту пирамиды и перпендикулярных плоскости основания. Если известны высота пирамиды H и сторона основания a, то остальные элементы пирамиды определяются формулами:

1) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{H}{AO} = \frac{H}{a\sqrt{2}/2}$, $\gamma = \pi/2 - \alpha$;

2) $\operatorname{tg}\beta = \frac{H}{OE} = \frac{H}{a/2}$;

3) $h = \sqrt{SO^2 + OE^2} = \sqrt{H^2 + \frac{a^2}{4}}$ или $h = \frac{H}{\sin\beta} = \frac{a/2}{\cos\beta}$ (из $\triangle ESO$);

4) $b = \sqrt{a^2/4 + h^2}$ (из $\triangle DES$);

5) $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{AO}{AF}$ (из $\triangle AFO$), $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $AF = \frac{ah}{b}$; $2\varphi = \arcsin\frac{b\sqrt{2}}{2h}$;

6) $R\cos\gamma = \frac{b}{2}$; $R = \frac{b}{2\cos\gamma}$ (из $\triangle ASK$);

7) $r = OE \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ (из $\triangle EOK'$).

Задача 1. Правильная четырехугольная пирамида задана двумя элементами: a — сторона основания и φ — угол между боковыми гранями. Найти остальные элементы пирамиды.

Задача 2. Правильная четырехугольная пирамида задана двумя элементами: R — радиус описанной сферы, a — сторона основания. Найти все остальные элементы пирамиды.

Задача 3. Правильная четырехугольная пирамида задана двумя элементами: r — радиус вписанного шара, R — радиус описанного шара. Найти объем пирамиды.

Задача 4. Изучить сечения правильной четырехугольной пирамиды плоскостями, параллельными диагонали AC и скрещиваю-

щемуся с ней ребру SD. В какие из этих сечений можно вписать окружность?

Замечание. Приведем одно простое утверждение, которое полезно иметь в виду при решении многих стереометрических задач.

Если в треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S ребро SA изменить в m раз, ребро SB — в n раз, а ребро SC — в k раз, то объем пирамиды с той же вершиной S, но с измененными длинами ребер, исходящих из этой вершины, изменится в mnk раз по сравнению с объемом первоначальной пирамиды.

Доказательство этого утверждения приведено на стр. 235 настоящего пособия. Там же приведен пример использования этого утверждения.

4. Куб

Куб, рис. 7, обладает рядом свойств, которые полезно знать при решении стереометрических задач. Предлагаем самостоятельно доказать следующие из них:

а) диагональ куба перпендикулярна любой скрещивающейся с ней диагонали граней куба;

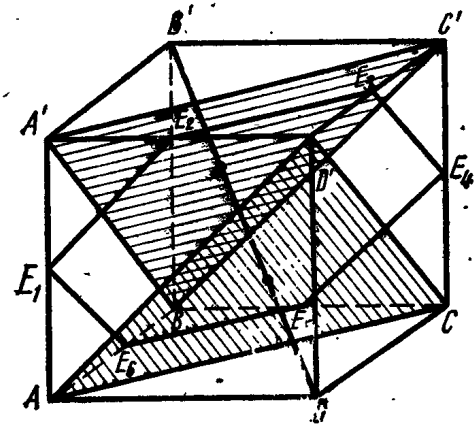


Рис. 7.

б) диагонали непараллельных граней куба образуют между собой угол 60°;

в) сечение куба плоскостью ($A'C'B$ или $AD'C$), проходящей через концы ребер куба, исходящих из одной вершины (B' или D) является правильным треугольником;

г) плоскости треугольников $A'C'B$ и $AD'C$ параллельны друг другу, перпендикулярны диагонали куба $B'D$ и делят эту диагональ на три равные части;

д) сечение куба, перпендикулярное диагонали куба и проходящее через ее центр, представляет собой правильный шестиугольник.

Большое количество задач связано с плоскостями сечений куба. Для решения таких задач необходимо уметь построить сечение куба плоскостью, задаваемой теми или иными условиями (например, по трем точкам, или по двум точкам при условии параллельности данной прямой и т. п.). Предлагаем следующие задачи.

Задача 1. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$, где AA', BB', CC', DD' — боковые ребра куба. Найти площадь сечения этого куба плос-

костью, проходящей через вершину A и середины ребер $B'C'$ и $C'D'$. Ребро куба равно 1.

Построение: рис. 8.

Ответ: $S=7\sqrt{17}/24$.

Задача 2. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$, где AA', BB', CC', DD' — боковые ребра. В каком отношении делит объем куба плоскость, проходящая через вершину A, середину ребра BC и центр грани $DCC'D'$?

Построение: рис. 9.

Ответ: 7 : 29.

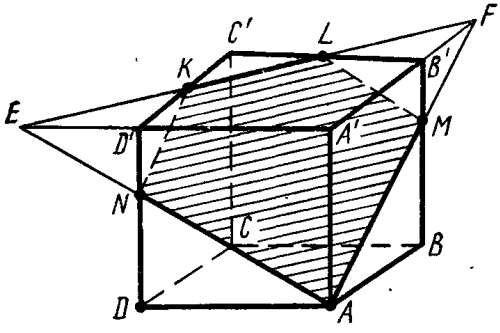


Рис. 8.

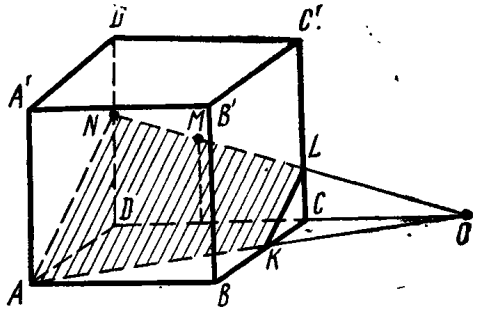


Рис. 9.

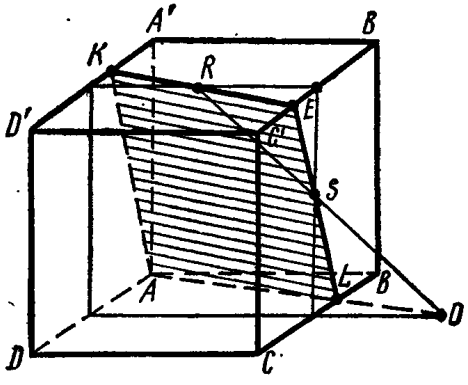


Рис. 10.

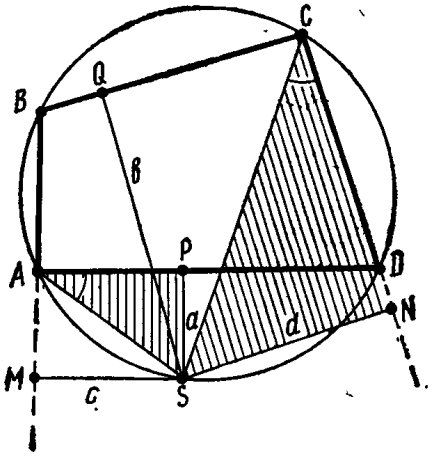


Рис. 11.

Задача 3. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$, где AA', BB', CC', DD' — боковые ребра. В каком отношении делит ребро $B'C'$ точка E, которая принадлежит плоскости, проходящей через вершину A и центры граней $A'B'C'D'$ и $B'C'CB$?

Построение: рис. 10.

Ответ: 2 : 1.

5. О чертеже в геометрических задачах

При решении задач по стереометрии первостепенное значение имеет хорошо составленный чертеж. Чертеж к задаче должен быть аккуратным, обязательно крупным. На нем должны быть видны все линии, фигуры, углы и т. п., которые используются при решении. Необходимо сохранять все начерченные тонкими линиями вспомогательные построения; они очень часто нужны при решении задачи. Необходимо прикинуть на черновике (один или несколько раз), в каком ракурсе удобнее изобразить рассматриваемое тело, как нагляднее провести сечение.

Надо помнить, что на рисунке изображается параллельная проекция заданного тела на плоскость чертежа. При этом искажаются размеры отрезков и углы, но сохраняются параллельность прямых и пропорциональность отдельных отрезков, лежащих на прямой.

Обычно стереометрическая задача сводится к решению нескольких плоских задач. Поэтому найдя способ «расчленить» задачу в пространстве на ряд плоских задач, бывает полезно нарисовать отдельно сечение или ту плоскую фигуру, которая рассматривается. При этом нужно сохранить те обозначения, которые были на общем чертеже.

Излагая решение задачи, надо делать ссылки на применяемые теоремы, но стараться употреблять поменьше слов, применяя общепринятую символику. В чистовике следует делать только основные выкладки с таким расчетом, чтобы проверяющий решение преподаватель или экзаменатор легко в них разобрался.

Об одном свойстве четырехугольника, вписанного в окружность

В заключение этого раздела приведем одну теорему, которую полезно знать (см. контрольную работу № 5, мех.-мат. ф-т и др.).

Теорема. Произведение расстояний от любой точки окружности, описанной около выпуклого четырехугольника, до его противоположных сторон или их продолжений равны между собой.

Доказательство. Пусть S — произвольная точка окружности, описанной около выпуклого четырехугольника $ABCD$, рис. 11. Точки P, Q, M и N являются основаниями перпендикуляров, опущенных из S соответственно на стороны AD, BC, AB и CD (или на продолжения этих сторон). Длины этих перпендикуляров обозначим через a, b, c и d соответственно. Нужно доказать, что $ab=cd$.

Доказательство этого факта следует из подобия пар треугольников: $\triangle APS \sim \triangle CNS$ и $\triangle AMS \sim \triangle CQS$. Эти треугольники — прямоугольные и имеют по равному вписанному углу, опирающемуся на дугу SD (при этом следует учесть, что угол MAD равен углу NCB).

§ 3. О ПОДГОТОВКЕ К ПИСЬМЕННОМУ ЭКЗАМЕНУ ПО МАТЕМАТИКЕ

Наиболее ответственным при поступлении в университет является письменный экзамен по математике.

В каждом из вариантов письменной работы содержится несколько задач (как правило, пять), на решение и запись которых отводится четыре часа. Ниже приводятся некоторые варианты экзаменационных работ, предлагавшихся в МГУ в последние годы.

Как правило, главная беда даже хорошо подготовленных учащихся — неумение распределить время на самом экзамене, быстро и правильно оформить решение на чистовике. Чтобы избавиться от этого недостатка, мало одних упражнений в черновом решении задач. Поэтому необходимо несколько раз устроить репетицию письменного экзамена. Это означает, что в течение ровно четырех часов, не вставая с места и не отвлекаясь, нужно решить задачи какого-либо варианта и записать их на чистовик с необходимыми объяснениями.

Если вариант оказался слишком простым, в другой раз нужно взять более трудный. Если же тем не менее за четыре часа все задание не выполнено, нужно довести его до конца, чтобы узнать, сколько времени фактически уходит на всю работу. Необходимо продумать причину неудачи. Это может быть недостаточная тренировка в решении задач по отдельным темам, или слишком медленная запись решений в чистовике, или неудачный порядок решения задачи и т. д.

Нужно иметь в виду, что среди задач письменного экзамена всегда одна или две выделяются большей трудностью и необычностью. Поэтому надо распределить время, отведенное на экзамен так, чтобы эти задачи не отняли слишком много времени в ущерб другим, более простым. Прочитав внимательно условия этих задач, разумно начинать работу с решения более простых для поступающего задач. Если какая-либо задача не получается, следует взяться за другую, и только тогда, когда сделан максимум возможного в остальных задачах, можно вернуться к самой трудной. Очень часто новый подход к задаче оказывается успешным.

Если на экзамене не хватило времени переписать какое-либо решение в чистовик, надо выделить в черновике те места, где содержится решение этой задачи или хотя бы часть его, и оно будет засчитано полностью или частично. Поэтому важно, чтобы и в черновике был порядок.

Для самостоятельной работы рекомендуется использовать задачи, приведенные во второй части настоящего пособия.

§ 4. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ ЗАОЧНЫХ КУРСОВ

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ НА МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ, ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТЫ И ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

Контрольная работа № 1

1. Произведение четырех целых положительных чисел меньше, чем их сумма, а сумма трех из этих чисел равна 28. Найти все такие числа.

2. Решить неравенство

$$||6x-1|-|4x+1||\leqslant 1.$$

3. Даны два квадратных уравнения

1) $x^2+(2a+1)x-a^2=0$,

2) $x^2+ax-1=0$.

При каких действительных значениях параметра a эти уравнения имеют по крайней мере один общий корень?

4. Указать все действительные a, при которых не существует ни одного действительного x, удовлетворяющего неравенствам

$$\begin{cases}\dfrac{(1-a)x-a}{x-2(1-a)}\geqslant 0,\\ x-8\geqslant ax.\end{cases}$$

5. а) Решить неравенство

$$\sqrt{12-3x}\geqslant 5x-2.$$

б) Для каждого значения a найти все действительные решения неравенства

$$\sqrt{a-x}<1+x.$$

6. Найти косинус угла при основании равнобедренного треугольника, зная, что точка пересечения его высот лежит на вписанной в треугольник окружности.

Контрольная работа № 2

1. а) Имеются три куска различных сплавов золота с серебром. Известно, что количество золота в 2 *г* сплава из третьего куска то же, что во взятых вместе 1 *г* из первого и 1 *г* из второго кусков. Вес третьего куска равен суммарному весу части первого куска, содержащей 10 *г* золота, и части второго куска, содержащей 80 *г*

золота. Третий кусок в четыре раза тяжелее первого и содержит 75 *г* золота.

Сколько граммов золота содержится в первом куске?

б) Две трубы, действуя вместе в течение одного часа, наполняют водой 3/4 бассейна. Если сначала первая труба наполнит одну четвертую часть бассейна, а затем вторая при выключенной первой доведет объем воды до 3/4 бассейна, то на это понадобится 2,5 ч. Если первую трубу включить на один час, а вторую — на полчаса, то они наполнят бассейн более чем наполовину.

За какое время наполняет бассейн каждая труба?

2. а) Решить уравнение

$$16 \sin x - \sin 2x = 1 - \cos 2x.$$

б) Решить уравнение

$$\cos x \cdot \cos 2x + 2 \sin 3x = (\cos x + \cos 3x)(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} 2x).$$

3. Три последовательных члена геометрической прогрессии a_1, a_2 и a_3 являются соответственно первым, четвертым и двадцать пятым членами арифметической прогрессии. Сумма чисел a_1, a_2, a_3 равна 114. Найти знаменатель геометрической прогрессии.

4. Найти все действительные решения системы

$$\begin{cases} y^2 - |xy| + 2 = 0, \\ 8 - x^2 = (x+2y)^2. \end{cases}$$

5. Центры трех окружностей различных радиусов расположены на одной прямой, а центр четвертой находится на расстоянии d от этой прямой. Найти радиус четвертой окружности, если известно, что каждая из этих окружностей касается трех других.

Контрольная работа № 3

1. Решить уравнение

$$\sqrt{\log_x \sqrt{3x}} \cdot \log_3 x = -1.$$

2. Решить неравенство

$$\log_2 (1 + \cos 4x) \leqslant 1 + \log_{\sqrt{2}} \sin x.$$

3. Решить неравенство

$$\cos^2 (x+1) \cdot \lg (9 - 2x - x^2) \geqslant 1.$$

4. Из пункта А в пункт В выехал велосипедист, который сначала двигался равноускоренно с ускорением 4 *км/ч*^{2}, а после того как его скорость возросла от 0 до v, продолжал двигаться равномерно со скоростью v. Расстояние между пунктами А и В равно 32 *км*. На первую половину пути велосипедист затратил в полтора раза больше времени, чем на вторую. Определить скорость v.

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC (угол C прямой). Ребро SA перпендикулярно плоскости основания. В пирамиду вписан шар, радиус которого равен $1/3$ SA. Через вершину S и точку касания шара с основанием пирамиды проходит плоскость, параллельная ребру BC. Эта плоскость делит поверхность шара в отношении $1:4$. Найти угол BAC.

Контрольная работа № 4

1. а) Правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ вращается вокруг прямой, проходящей через ее вершину S параллельно стороне основания AB. Найти объем тела вращения, если известно, что высота пирамиды равна h, а сторона основания — a. (При вращении указанная прямая остается параллельной стороне AB.)

б) В треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S боковые грани образуют одинаковые двугранные углы с плоскостью основания ABC пирамиды. Окружность, вписанная в основание, касается ребра AB в точке D, а ребра BC — в точке E. Известно, что $\angle ASB = 7\pi/12$, $\angle BSC = 5\pi/12$, $\angle ASC = \pi/2$. Найти отношение площади треугольника DBE к площади треугольника ABC.

2. Найти все x, удовлетворяющие одновременно следующим условиям:

$$\begin{cases} \cos 13x = \cos x, \\ \cos 2x + \sin 5x = 1, \\ |x| < 3. \end{cases}$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin y \cdot \cos x + \sin x = 0, \\ 2\cos^2 y + \sin y \cdot \sin x = \cos 2y \cdot \cos x. \end{cases}$$

4. Автомобиль выезжает из пункта А и едет с постоянной скоростью v *км/ч* до пункта В, отстоящего от А на расстоянии 24,5 *км*. В пункте В он переходит на равнозамедленное движение, причем за каждый час его скорость уменьшается на 54 *км/ч*, и движется так до полной остановки. Затем он сразу же поворачивает обратно и возвращается в А с постоянной скоростью v *км/ч*.

Какова должна быть скорость v, чтобы автомобиль быстрее всего проехал путь от А до остановки и обратно до пункта А указанным выше способом?

5. Построить графики функций:

а) $y = \log_{\frac{1}{3}} (x^2 - 7x + 6)$;

б) $y = x \cdot \sin x$;

в) $y = \dfrac{x - 1}{x^2 + x - 12}$.

Контрольная работа № 5

1. На строительстве дороги в одной смене работало несколько машин 1-го типа и несколько машин 2-го типа. Одну машину 1-го типа обслуживают 6 человек, ее производительность в дождь равна 140 $м^2$ за смену, а в хорошую погоду — 260 $м^2$ за смену. Общая выработка всех машин 1-го типа за эту смену равна 900 $м^2$. Одну машину 2-го типа обслуживает 7 человек. Ее максимальная производительность — 400 $м^2$ за смену. Сколько было машин 1-го и 2-го типов, если известно, что все машины обслуживало не больше 40 человек и, кроме того, 700 $м^2$ из проделанной работы можно было выполнить лишь машинами 2-го типа?

2. Решить уравнение

$$\frac{4}{3}\cos^2\frac{x}{2}(1-\sqrt{\sin x})=\sqrt{2\cos x}-\sqrt{\sin 2x}.$$

3. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Расстояние от вершины E до сторон AB, BC и CD (или их продолжений) соответственно равны a, b и c. Найти расстояние от вершины E до диагонали AD.

4. Найти все значения x, при которых справедливо неравенство

$$\frac{\log_x 4}{1-\log_x 3}\cdot\log_2\frac{5-4x}{4x-8}\geqslant 2.$$

5. Даны три уравнения с действительными коэффициентами:

1) $ax^2+bx+c=0$,
2) $cx^2+bx+a=0$,
3) $x^2+a^2x+c^2=0$.

Каждое из них имеет по крайней мере один действительный корень. Известно, что любой корень третьего уравнения удовлетворяет первому уравнению и хотя бы один корень второго уравнения является корнем третьего уравнения. Найти числа a, b, c, если $a>2|c|$.

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ НА ХИМИЧЕСКИЙ, БИОЛОГИЧЕСКИЙ, ПОЧВЕННЫЙ, ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ И ГЕОГРАФИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТЫ

Контрольная работа № 1

1. Имеются два раствора одной и той же соли в воде. Для получения смеси, содержащей 10 $г$ соли и 90 $г$ воды, берут первого раствора вдвое больше по весу, чем второго. Через неделю из каждого килограмма первого и второго растворов испарилось по 200 $г$ воды, и для получения такой же смеси, как и раньше, требует-

ся первого раствора уже вчетверо больше по весу, чем второго Сколько граммов соли содержалось первоначально в 100 *г* каждого раствора?

2. Найти все действительные значения параметра a, при которых системы уравнений

$$\begin{cases} ax+2y=2b+1, \\ x+y=3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x+y=a^2+2, \\ x+3y=3 \end{cases}$$

равносильны.

3. Найти все значения x, при которых справедливо неравенство

$$\frac{1}{x^2-3x+2} \geqslant \frac{1}{2x^2+9x+4}.$$

4. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x+4} \leqslant 1.$$

5. В треугольнике ABC из вершины B к стороне AC проведена медиана BD. Из вершины A проведен отрезок прямой, который пересекает медиану BD в точке L, а сторону BC — в точке M. В каком отношении точка M делит сторону BC, если известно, что $BL=1/6 \cdot BD$?

Контрольная работа № 2

1. В соревнованиях по бегу на дистанции 120 *м* участвуют три бегуна. Скорость первого из них больше скорости второго на 1 *м/с*, а скорость второго равна полусумме скоростей первого и третьего. Определить скорость третьего бегуна, если известно, что первый бегун пробежал дистанцию на 3 *сек* быстрее третьего.

2. Решить уравнение

$$3 \operatorname{tg} x(7+\cos 2x)=2(\cos 2x-1).$$

3. Решить неравенство

$$\cos 6x - \frac{5}{2} < 2\sqrt{3} \sin 3x.$$

4. Найти все решения системы

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y + \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \sin y = \cos^2 \frac{x}{2} \cdot \sin y \\ 2x - y = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

5. В треугольнике ABC угол C равен 60°; радиус круга, описанного вокруг этого треугольника, равен $2\sqrt{3}$. На стороне AB взята точка D так, что $AD=2 \cdot DB$ и при этом $CD=2\sqrt{2}$. Найти площадь треугольника ABC.

Контрольная работа № 3

1. Из пункта А в пункт В выехал автомобиль и одновременно из пункта В в пункт А выехал велосипедист. После встречи они продолжали свой путь. Автомобиль, доехав до пункта В, тотчас повернул обратно и догнал велосипедиста через два часа после момента их первой встречи. Сколько времени после первой встречи ехал велосипедист до пункта А, если известно, что к моменту второй встречи он проехал 2/5 всего пути от В до А?

2. Решить уравнение

$$\sqrt{1-\cos 2x}=\sqrt{2}\sin x\left(\cos x-\frac{3}{2}\right).$$

3. а) Решить уравнение

$$|2+\log_{\frac{1}{5}} x|+3=|1-\log_{\frac{1}{5}} x|.$$

б) Решить неравенство

$$\log_2(5-4x)+\log_{\frac{1}{2}}(2x-x^2)\geqslant 2.$$

в) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4\cdot 5^{x-1}+0,\ 1\cdot 2^{y+2}=4{,}2, \\ 25^x+2^y=25{,}5. \end{cases}$$

4. Три последовательных члена геометрической прогрессии a_1, a_2, a_3 являются соответственно первым, четвертым и двадцать пятым членами арифметической прогрессии. Сумма чисел a_1, a_2, a_3 равна 114. Найти знаменатель геометрической прогрессии.

5. Плоскость проходит через вершину основания A треугольной пирамиды $SABC$, делит пополам медиану треугольника SAB, а медиану SL треугольника SAC пересекает в точке D такой, что

$$\frac{SD}{DL}=\frac{1}{2}.$$

В каком отношении делит эта плоскость объем пирамиды?

Контрольная работа № 4

1. К бассейну объемом в 300 $м^3$ подведены три трубы: через первую и вторую вода поступает, через третью выливается. Если все три трубы включены одновременно, то количество воды в бассейне увеличивается ежеминутно на 20 $м^3$. Бассейн начали напол-

нять водой, включив первую и третью трубы. Более чем через 12 минут после начала работы в бассейне оказалось 100 $м^3$ воды. В этот момент первую и третью трубы закрыли и включили вторую трубу, завершившую наполнение бассейна. Всего на наполнение бассейна было затрачено 30 мин.

Определить, за какое время наполнился бы бассейн, если бы его с начала до конца наполняла только вторая труба?

2. Решить уравнение

$$4^{\sqrt{3x^2-2x+1}}+2=9\cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}.$$

3. Решить уравнение

$$\log_x \sqrt{\frac{x}{\sin^2\frac{\pi}{4}}}+\log_x \cos\frac{\pi}{4}=\frac{5\sqrt{x+3}-8}{2(x+1)}.$$

4. Решить уравнение

$$2\sin x+\sin 3x=2\cos x-\cos 3x.$$

5. Три одинаковых прямых круговых конуса, радиусы оснований которых равны r и составляют 3/4 их высоты, расположены по одну сторону от плоскости P, а их основания лежат в этой плоскости. Окружности оснований каждых двух из этих конусов касаются. Найти радиус шара, лежащего между этими конусами и касающегося как плоскости P, так и трех конусов.

Контрольная работа № 5

1. В магазине спортивных товаров туристы покупали снаряжение. Первый купил топорик и спальный мешок, заплатив 18 рублей. Второй купил два спальных мешка и рюкзак, заплатив 35 рублей. Третий купил топорик, спальный мешок и палатку, заплатив 68 рублей. Четверный купил рюкзак, два спальных мешка и две палатки. Сколько заплатил четвертый турист?

2. Решить неравенство

$$\log_{16}(18-2^x)\log_4\frac{18-2x}{32}>-\frac{1}{2}.$$

3. Найти все пары значений (x, y), являющиеся решениями системы

$$\begin{cases} \operatorname{tg}x+\frac{1}{\cos y}=2\sqrt[3]{34}, \\ \operatorname{tg}x\cdot\frac{1}{\cos y}=\sqrt[3]{34^2}-5, \end{cases}$$

удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

4. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC равна 2 и является хордой некоторой окружности. Катет AC равен 1 и лежит внутри окружности, а его продолжение пересекает окружность в точке D, причем $CD=3$. Чему равен радиус окружности?

5. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S сторона основания равна 2 *см*. Через сторону основания BC проведено сечение, которое пересекает ребро SA в точке M. Известно, что $SM : MA = 1 : 3$, а площадь сечения равна 3 $см^2$.

Найти объем пирамиды $SABC$.

§ 5. ЛИТЕРАТУРА, РАБОЧИЙ ПЛАН И КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ПО МАТЕРИАЛУ, ВКЛЮЧЕННОМУ В НОВУЮ ШКОЛЬНУЮ ПРОГРАММУ ПО МАТЕМАТИКЕ

В настоящее время в средней школе осуществляется переход на изучение математики по новой учебной программе. Этот переход вызовет соответствующие изменения и в «Программе для поступающих в ВУЗы СССР», а также будет учитываться при проведении конкурсных экзаменов в течение ближайших нескольких лет.

В этой части пособия приводится литература, план повторения и контрольные работы для изучения материала, который включен в новую школьную программу по математике.

Основная литература

1. Макарычев Ю. Н., Миндюк Н. Г., Монахов В. М., Муравин К. С., Суворова С. Б. (под редакцией А. И. Маркушевича) Алгебра, 8-й класс. М. «Просвещение», 1974 (в дальнейшем сокращенно обозначается *«Макарычев»*).

2. Колмогоров А. Н., Вейц Б. Е., Демидов И. Т., Ивашев-Мусатов О. С., Шварцбурд С. И. Алгебра и начала анализа (учебное пособие для 9-го класса). М., «Просвещение», 1975 (в дальнейшем *«Колмогоров, 9»*).

3. Колмогоров А. Н., Ивашев-Мусатов О. С., Ивлев Б. М., Шварцбурд С. И. Алгебра и начала анализа (учебное пособие для 10-го класса). М. «Просвещение», 1976, (в дальнейшем *«Колмогоров, 10»*).

Дополнительная литература

Ивлев Б. М., Крысин А. Я., Муравин К. С., Руденко В. Н., Соколова А. В. Дидактический материал. Алгебра и начала анализа для 9-го класса. М. «Просвещение», 1975.

ТЕМА 1

Приближенные вычисления

Относительная погрешность. Запись приближенных значений чисел. Оценка погрешности результатов действий.

Макарычев, §§ 3, 4, стр. 25—42. Упражнения №№ 98—108, 109—113, 114—119, 125—138.

ТЕМА 2

Принцип математической индукции

Формулировка и содержание принципа математической индукции. Применение принципа математической индукции к доказательству математических предложений.

Колмогоров, 9. § 1, стр. 7—1. Упражнения №№ 12—31.

ТЕМА 3

Комбинаторика. Бином Ньютона

Соединения: перестановки, размещения и сочетания. Формулы для вычисления числа перестановок, размещений и сочетаний. Формула Ньютона. Основные следствия.

Колмогоров, 9. § 2, стр. 17—39. Упражнения №№ 32—42, 43—48, 49—62, 63—69, 70, 71—73, 80—112.

ТЕМА 4

Предел и непрерывность функций

Функции. Основные определения. Возрастание и убывание функций. Приращение функции. Предел и непрерывность функций в точке. Теоремы о пределах. Непрерывность основных функций.

Колмогоров, 9. § 8, стр. 93—114. Упражнения №№ 265—281, 282—297, 298—306, 309—313, 321—324, 327—336.

ТЕМА 5

Производная функция

Определение производной, ее геометрическая и физическая интерпретация. Примеры вычисления производных. Производная суммы функций, их произведения и частного. Производная сложной функции. Производные от основных элементарных функций. Применение производной к исследованию функций.

Колмогоров, 9. §§ 9, 10, 11, стр. 118—162. Упражнения №№ 349—361, 363—365, 375—377, 378—385, 388—395, 401—447, 465—469, 473—479, 494—496, 497—503, 504—545.

Колмогоров, 10. § 15, стр. 7—13, §§ 21—23, стр. 103—130. Упражнения №№ 1—14, 15—28, 32—41, 572—581, 663—669, 711—713, 740—773.

ТЕМА 6

Первообразная функции и интеграл

Первообразная функции и ее основное свойство. Три правила нахождения первообразных. Площадь криволинейной трапеции. Формула Ньютона — Лейбница. Интеграл. Геометрическая и физическая интерпретация. Некоторые приемы вычисления интегралов.

Колмогоров, 10. §§ 19—20, стр. 75—100. Упражнения №№ 392—401, 402—407, 409—418, 419—424, 434—439, 446—450, 458—471, 472—507, 619—622, 784—799, 804—810.

Контрольная работа № 6

1. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C, углом B, равным 30°, и катетом $CA=1$ проведена медиана CD. Кроме того, из точки D под углом 15° к гипотенузе проведена прямая, пересекающая отрезок BC в точке F. Найти площадь треугольника CDF. Указать ее приближенное значение в виде десятичной дроби с точностью до 0,01.

2. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске, имеющей, как обычно, 8×8 клеток, восемь разноцветных фишек так, чтобы на каждой горизонтали и вертикали стояла ровно одна фишка?

3. Вычислить площадь фигуры, определяемой неравенствами

$$2^x \leqslant y < 3 - x^2,$$

если известно, что координаты всех точек этой фигуры удовлетворяют неравенству $x \geqslant 0$.

4. Между двумя портами, удаленными друг от друга на расстояние 1200 *км*, с постоянной скоростью курсирует теплоход. Затраты на рейс в одном направлении слагаются из двух частей. Первая часть, связанная с обслуживанием пассажиров, пропорциональна времени нахождения теплохода в пути, а другая, обусловленная стоимостью топлива, пропорциональна кубу скорости движения. Найти скорость, с которой должен идти теплоход, чтобы стоимость рейса была минимальной, если известно, что при скорости 30 *км/ч* затраты равны 4,5 тыс. рублям, причем стоимость обслуживания пассажиров составляет 2/3 стоимости топлива.

5. Построить графики функций и выполнить их исследование

а. $y = \frac{x}{4x^2+1}$;

б. $y = x \cdot \sin x$.

Контрольная работа № 7

1. Имеется пять элементов a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Найти число перестановок этих элементов, в которых a_1 не стоит на первом месте, и a_2 не стоит на втором месте.

2. Ребра прямоугольного параллелепипеда, вычисленные с точностью до 0,01 *см*, равны соответственно 4,25 *см*, 5,12 *см* и 6,15 *см*. С какой наибольшей точностью можно вычислить объем этого параллелепипеда? Найти этот объем.

3. Если начало системы координат выбрать в точке стояния корабля, то линию берега можно описать уравнением $y = \log_2 x$. Определить под каким углом видят берег с этого корабля.

4. Доказать, что

$$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$$

при любом натуральном n, большем единицы.

5. Найти член разложения $(3x+5)^{12}$ с наибольшим коэффициентом.

Контрольная работа № 8

1. Оля, студентка второго курса биологического факультета, проводила эксперименты по выращиванию бактерий в питательной среде. При этом она заметила, что скорость увеличения числа бактерий в любой момент времени пропорциональна числу бактерий

$N(t)$, которое имеется в этот момент времени, причем коэффициент пропорциональности равен 0,5 (время измеряется в часах). По заданию необходимо вырастить колонию бактерий численностью более 20 000 единиц. Каково наименьшее время выращивания колонии бактерий указанной численности, если известно, что Оля первоначально поместила в среду 200 бактерий?

Указание. Составить дифференциальное уравнение для функции $N(t)$ и использовать при его решении начальное условие $N(o)=200$.

2. Даны треугольник со сторонами, равными $\sqrt{22}$ и $1/\sqrt{3}$, и углом 60° между ними и прямоугольник со сторонами, равными 29 и 1/25. Определить, что больше: площадь треугольника или площадь прямоугольника.

3. Доказать, что уравнение

$$\sqrt{x}=-x^2+8x-15$$

не имеет решений.

4. Сколько существует способов разделить группу школьников из 12 человек на три подгруппы, состоящих из равного числа людей?

5. Построить график функции

$$y=\frac{3x^4+48}{x^3}$$

и выполнить его исследование.

Часть II

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ С РАЗБОРОМ ОТДЕЛЬНЫХ ВАРИАНТОВ

§ 1. ГЕОГРАФИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, 1972 г.

Вариант 1

1. Фрукты в магазин были доставлены двумя машинами, по 60 ящиков в каждой; при этом в 21 ящике были груши, а в остальных — яблоки. Сколько ящиков с грушами было в каждой машине, если известно, что в первой машине на один ящик с грушами приходилось в три раза больше ящиков с яблоками, чем во второй?

2. Найти все решения уравнения

$$\sin 2x - \cos x + 2 \sin x = +1,$$

удовлетворяющие условию

$$0 < x < 5.$$

3. Найти все значения x, при которых справедливо неравенство

$$2 \log_7 x - \log_x 49 < 3.$$

4. Найти все числа x и y, для которых

$$\begin{cases} 2^{x+1} = 4y^2 + 1, \\ 2^x < 2y. \end{cases}$$

5. Окружность радиуса R проходит через вершины A и B треугольника ABC и касается прямой AC в точке A. Найти площадь треугольника ABC, зная, что $\angle ABC = \beta$ и $\angle CAB = \alpha$.

Вариант 2

1. Брат и сестра собрали каждый по 40 грибов, из них 52 белых гриба. Сколько белых грибов собрал каждый, если известно, что отношение числа белых к числу остальных грибов у брата в четыре раза больше, чем у сестры?

2. Найти все решения уравнения

$$\sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x - \cos^2 x = -2,$$

удовлетворяющие условию

$$0 < x < 4.$$

3. Найти все значения x, для которых справедливо неравенство

$$2\log_3 x - \log_x 27 < 5.$$

4. Найти все числа x и y, для которых

$$\begin{cases} 4\log_2^2 x + 1 = 2\log_2 y, \\ \log_2 x^2 \geqslant \log_2 y. \end{cases}$$

5. Окружность радиуса R с центром в точке O проходит через вершины A и B треугольника ABC, пересекает отрезок BC в точке M и касается прямой AC в точке A. Найти длину отрезка CM, зная, что $\angle ACO = \alpha$ и $\angle MAB = \beta$.

Вариант 3

1. В двух автоколоннах, по 28 автомобилей в каждой, было 11 «Жигулей», остальные — «Москвичи». Сколько «Москвичей» было в каждой автоколонне, если известно, что в первой автоколонне на каждую машину «Жигули» приходилось в два раза больше «Москвичей», чем во второй?

2. Найти все решения уравнения

$$\sqrt{3}\sin x + 2\cos x = \sqrt{3} + \sin 2x,$$

удовлетворяющие условию

$$0 < x < 2.$$

3. Найти все значения x, для которых справедливо неравенство

$$\log_2 x - \log_x 32 < 4.$$

4. Найти все числа x и y, для которых

$$\begin{cases} 2^{x+1} = y^2 + 4, \\ 2^{x-1} \leqslant y. \end{cases}$$

5. Через вершины B и C треугольника ABC проведена окружность, которая пересекает сторону AB в точке K и сторону AC в точке E. Найти AE, зная, что $AK = KB = a$, $\angle BCK = \alpha$, $\angle CBE = \beta$.

Вариант 4

1. Два стрелка сделали по 30 выстрелов каждый; при этом было 44 попадания, остальные — промахи. Сколько раз попал каждый, если известно, что у первого стрелка на каждый промах приходилось в два раза больше попаданий, чем у второго?

2. Найти все решения уравнения

$$5\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x + 3\sin^2 x = 2,$$

удовлетворяющие условию

$$0 < x < 5.$$

3. Найти все значения x, для которых справедливо неравенство

$$2\log_5 x - \log_x 125 < 1.$$

4. Найти все числа x и y, для которых

$$\begin{cases} \log_2^2 x + 1 = \log_2 y^2, \\ \log_2 x \geqslant \log_2 y. \end{cases}$$

5. Дан треугольник ABC. Окружность радиуса R касается стороны AC в точке M и стороны BC в точке P. Сторона AB пересекает эту окружность в точках K и E. Точка E лежит на стороне BK. Найти BE, зная, что $BC=a$, $CM=b<a$, $\angle KME=\alpha$.

Разбор варианта 1

Задача 1. Обозначим количество ящиков с грушами в первой машине через x, а во второй машине — через y. Тогда ящиков с яблоками в первой машине было $(60-x)$, а во второй — $(60-y)$. Условия задачи приводят к системе уравнений

$$\begin{cases} x + y = 21, \\ \dfrac{x}{60-x} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{y}{60-y}, \end{cases}$$

которая после исключения величины y дает уравнение

$$x^2 + 99x - 630 = 0.$$

Отсюда находим, что $x=6$. Здесь, конечно, принято во внимание, что $x>0$. После этого находим, что $y=15$.

Ответ: в первой машине было 6 ящиков с грушами, а во второй — 15.

Задача 2. Представляя $\sin 2x$ как $2\sin x\cdot\cos x$, получим

$$\cos x(2\sin x - 1) + (2\sin x - 1) = 0,$$

или

$$(2\sin x - 1)(\cos x + 1) = 0.$$

Отсюда находим:

а) $\sin x = -1/2$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$;

б) $\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi n$.

Отберем из полученных решений те, которые удовлетворяют условию $0 < x < 5$, т. е. определим n из неравенства:

а) $0 < (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n < 5$.

Легко видеть, что это неравенство может выполняться только при $n=0$, $n=1$;

б) $0 < \pi + 2\pi n < 5$.

Здесь подходит только одно значение n: $n=0$.

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = 5\pi/6$, $x_3 = \pi$.

Задача 3. Допустимыми в этой задаче являются те значения x, которые больше нуля и не равны единице.

Если воспользоваться формулой перехода к новому основанию, в данном случае 7:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a},$$

то получим неравенство

$$2\log_7 x - \frac{2}{\log_7 x} < 3.$$

При $x > 1$, т. е. когда $\log_7 x > 0$, имеем

$$2\log^2_7 x - 3\log_7 x - 2 < 0,$$

$$-\frac{1}{2} < \log_7 x < 2.$$

Так как основание логарифма больше единицы, то

$$\frac{1}{\sqrt{7}} < x < 49.$$

Учитывая, что сейчас рассматривается случай, когда $x > 1$, получаем

$$1 < x < 49.$$

Если $0 < x < 1$, то $\log_7 x < 0$ и тогда

$$2\log^2_7 x - 3\log_7 x - 2 > 0:$$

а) $\log_7 x > 2$; $x > 49$,

б) $\log_7 x < -1/2$; $0 < x < 1/\sqrt{7}$.

Очевидно, что подходят значения x, соответствующие только второму случаю.

Ответ: $1 < x < 49$, $0 < x < 1/\sqrt{7}$.

Задача 4. Первое уравнение системы можно записать так:

$$2^x = 2y^2 + \frac{1}{2}.$$

Тогда неравенство приобретает вид

$$2y^2 + \frac{1}{2} \leqslant 2y,$$

или

$$(2y-1)^2 \leqslant 0.$$

Ясно, что квадрат любого действительного числа отрицательным быть не может. Значит, $2y-1=0$, т. е. $y=0{,}5$. Далее находим:

$$2^x = 1, \qquad x = 0.$$

Ответ: $x=0$; $y=0{,}5$.

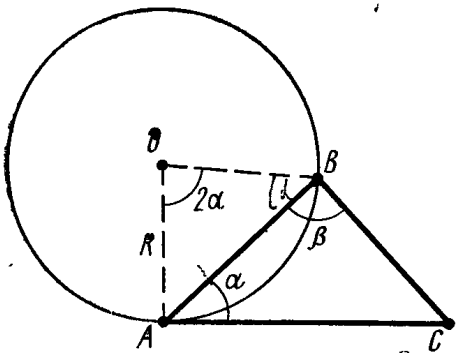


Рис. 12.

Задача 5. Чертеж к этой задаче представлен на рис. 12. Пусть точка O — центр указанной окружности. Рассмотрим $\triangle OAB$. В этом треугольнике угол AOB равен 2α, поскольку он измеряется дугой, стягивающей хорду AB. В то же время угол BAC, равный по условию α, измеряется половиной этой дуги.

Из $\triangle AOB$ находим хорду AB: $AB = 2R\sin\alpha$. Затем нетрудно найти искомую площадь треугольника ABC, в котором известны все углы и сторона AB. Используем теорему синусов:

$$\frac{AC}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin(\pi-\alpha-\beta)}; \quad AC = 2R\sin\alpha\,\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Площадь треугольника ABC определяется равенством

$$S = \frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\alpha = \frac{2R^2\cdot\sin^2\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

при $(\alpha+\beta)<\pi$.

§ 2. ГЕОГРАФИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, 1973 г.

Вариант 1

1. На прокладке двух параллельных трубопроводов работали два экскаватора. Первый из них начал работать на 30 *мин* раньше второго. Когда второй экскаватор прокопал 27 *м*, оказалось, что он отстает от первого на 1 *м*. С какой скоростью копали экскаваторы, если известно, что второй выкапывает в час на 4 *м* больше, чем первый?

2. Упростить выражение

$$5^{\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{2}} + \log_{\sqrt{2}} \frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{7}} + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{10+2\sqrt{21}}.$$

3. Сторона AB квадрата $ABCD$ равна 1 и является хордой некоторой окружности, причем остальные стороны квадрата лежат вне этой окружности. Длина касательной CK, проведенной из вершины C к той же окружности, равна 2. Чему равен диаметр окружности?

4. Найти решения уравнения

$$3^{x^2+4x} = \frac{1}{25},$$

удовлетворяющие неравенству $x > -3$.

5. Решить уравнение

$$\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 2\sqrt{2+2\cos 2x}.$$

Вариант 2

1. Две машинистки вместе напечатали 65 страниц, причем первая работала на один час больше второй. Однако вторая машинистка печатает в час на две страницы больше первой, и потому она напечатала на 5 страниц больше. Сколько страниц в час печатает каждая машинистка?

2. Упростить выражение

$$4^{[5\log_4 \sqrt{2}\,(3-\sqrt{6}) - 6\log_8 (\sqrt{3}-\sqrt{2})]}.$$

3. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC равна 2 и является хордой некоторой окружности. Катет $AC=1$ и лежит внутри окружности, а его продолжение пересекает окружность в точке D, причем $CD=3$. Чему равен радиус окружности?

4. Найти решения уравнения

$$\frac{x}{x-4\log_8 2} = \frac{5}{x+11},$$

удовлетворяющие неравенству $x < -2$.

5. Решить уравнение

$$2\operatorname{tg} x - 4\operatorname{ctg} x = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 2 + \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Вариант 3

1. Трактор выехал от станции к деревне на 30 мин раньше грузовика. Когда грузовик, обогнав трактор, прибыл в деревню, трактору осталось ехать до деревни еще 3 *км*. Найти скорости трактора и грузовика, если известно, что скорость грузовика на 20 *км/ч* больше скорости трактора, а расстояние от станции до деревни равно 12 *км*.

2. Упростить выражение

$$6^{\log_{\sqrt{6}} 3} + \log_{\sqrt{3}} \frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{7+2\sqrt{10}}.$$

3. Сторона AB правильного шестиугольника $ABCDEF$ равна $\sqrt{3}$ и является хордой некоторой окружности, причем остальные стороны шестиугольника лежат вне этой окружности. Длина касательной CM, проведенной к той же окружности из вершины C (соседней с вершиной B), равна 3. Чему равен диаметр окружности?

4. Найти решения уравнения

$$5^{x^2-2x} = 128,$$

удовлетворяющие неравенству $x>3$.

5. Решить уравнение

$$\frac{\sin 2x}{2} - \sin^2 x = \sqrt{1-\cos 2x}.$$

Вариант 4

1. Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми равно 84 *км*, выехал велосипедист, а через 2 ч навстречу ему из В в А выехал мотоциклист, скорость которого на 48 *км/ч* больше скорости велосипедиста. Найти их скорости, если известно, что к моменту встречи велосипедист проехал на 16 *км* меньше, чем мотоциклист.

2. Упростить выражение

$$2^{[6\log_2 \sqrt{2}\,(5-\sqrt{10}) + 8\log_{\frac{1}{4}}(\sqrt{5}-\sqrt{2})]}.$$

3. Сторона AB треугольника ABC является хордой некоторой окружности. Стороны AC и BC лежат внутри окружности, продолжение стороны AC пересекает окружность в точке D, а продолжение стороны BC — в точке E, причем $AB=AC=CD=2$, $EC=\sqrt{2}$. Чему равен радиус окружности?

4. Найти решения уравнения

$$\frac{x}{x-\log_2 3}=\frac{3}{x-3},$$

удовлетворяющие неравенству $x<5$.

5. Решить уравнение

$$3\sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+2+\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}}=16\sin x-\frac{10}{\sin x}.$$

Разбор варианта 1

Задача 1. Обозначим скорость, с которой копал землю первый экскаватор, буквой v *м/ч*. Тогда скорость второго будет соответственно $(v+4)$ *м/ч*. Пусть t — время, за которое второй экскаватор выкапывает 27 *м*. Условие задачи приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} v\left(t+\frac{1}{2}\right)=28, \\ (v+4)t=27. \end{cases}$$

Подставляя t из второго уравнения в первое, получим квадратное уравнение

$$v^2+2v-224=0,$$

положительный корень которого $v=14$ дает решение задачи.

Ответ: 14 *м/ч*, 18 *м/ч*.

Задача 2. Легко проверить справедливость нижеследующих равенств:

1) $5^{\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{2}}=5^{\log_5 2}=2;$

2) $\log_{\sqrt{2}}\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}=\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{7}-\sqrt{3});$

3) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{10+2\sqrt{21}}=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{10+2\sqrt{21}}=$

$$=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2}=\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{7}+\sqrt{3}).$$

Тогда

$$2+\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{7}-\sqrt{3})+\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{7}+\sqrt{3})=2+\log_{\sqrt{2}}4=6.$$

Ответ: 6.

Задача 3. Продолжим сторону квадрата BC до пересечения с окружностью в точке M; длину хорды BM обозначим через x (рис. 13).

По теореме о секущей и касательной, проведенных к окружности из одной точки, имеем

$$(x+1)\cdot 1=4,$$

т. е.

$$BM=x=3.$$

Проведем $OF\perp BM$ и $OE\perp AB$ и соединим точки O и B. Из прямоугольного треугольника OEB находим

$$OB^2=BE^2+EO^2,$$

$$R=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{10}}{2},\quad 2R=\sqrt{10}.$$

Ответ: $\sqrt{10}$.

Задача 4. Логарифмируя обе части уравнения

$$3^{x^2+4x}=\frac{1}{25}$$

по основанию 3, получим равносильное уравнение

$$x^2+4x+2\log_3 5=0.$$

Поскольку $2\log_3 5<4$, дискриминант этого квадратного уравнения положителен и корни уравнения действительны:

$$x=-2\pm\sqrt{4-2\log_3 5}.$$

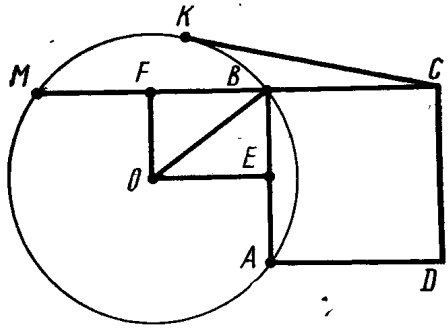


Рис. 13.

Корень со знаком «плюс» удовлетворяет условию задачи $x>-3$. Другой корень можно представить в виде

$$x=-2-\sqrt{4-2\log_3 5}=$$

$$=-2-\sqrt{\log_3 3\frac{6}{25}},$$

откуда легко увидеть, что он меньше -3 и поэтому не является решением задачи.

Ответ: $x=-2+\sqrt{4-2\log_3 5}$.

Задача 5. Используя свойство арифметического корня

$$\sqrt{x^2}=|x|$$

и формулу

$$1+\cos 2x=2\cos^2 x,$$

запишем данное уравнение в следующем виде:

$$\sqrt{3}\sin x\cdot\cos x-\cos^2 x-2|\cos x|=0.$$

Теперь необходимо рассмотреть два случая:

а) $\cos x\geqslant 0$.

$$\cos x\,(\sqrt{3}\sin x-\cos x-2)=0$$

1. $\cos x=0$, $x_1=\pi/2+\pi n$.
2. $\sqrt{3}\sin x-\cos x-2=0$.

Вводя вспомогательный угол, получим

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x=1,\quad \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1;$$

$$x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad x_2=\frac{2\pi}{3}+2\pi n.$$

Однако $\cos x_2<0$, что не удовлетворяет условию рассматриваемого случая.

б) $\cos x<0$.

Аналогично предыдущему находим

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x=-1,\quad \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-1;$$

$$x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad x_3=-\frac{\pi}{3}+2\pi n.$$

Эти корни также не удовлетворяют условию рассматриваемого случая, так как $\cos x_3>0$. Поэтому новых решений также не получаем.

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$.

§ 3. ГЕОГРАФИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, 1974 г.

Вариант 1

1. Из пункта А в пункт В, расположенный в 24 *км* от А, одновременно отправились велосипедист и пешеход. Велосипедист прибыл в пункт В на 4 ч раньше пешехода. Известно, что если бы велосипедист ехал с меньшей на 4 *км/ч* скоростью, то на путь из А в В он затратил бы вдвое меньше времени, чем пешеход. Найти скорость пешехода.

2. Найти все решения уравнения

$$\cos 3x+\sin\left(x+\frac{7\pi}{2}\right)=\sqrt{3}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right).$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4\left(\frac{1}{2}\right)^{y-x} = \frac{1}{2^{x+2}}, \\ \sqrt{2x+1} + \sqrt{4x+2y+5} = \sqrt{2x+2y+4}. \end{cases}$$

4. Дан квадрат $ABCD$, сторона которого равна a, и построены две окружности. Первая окружность целиком расположена внутри квадрата $ABCD$, касается стороны AB в точке E, а также касается стороны BC и диагонали AC. Вторая окружность с центром в точке A проходит через точку E. Найти площадь общей части двух кругов, ограниченных этими окружностями.

5. Найти все значения x, удовлетворяющие неравенству

$$\frac{4x^2 + 12x + 5}{\log_6\left(x^2 + 2x + \frac{7}{16}\right)} > 0.$$

Вариант 2

1. Две автоколонны перевозят груз. Машины имеют одинаковую грузоподъемность и в каждый рейс загружаются полностью. Первая автоколонна за один рейс перевозит на 5 $т$ груза больше, чем вторая автоколонна. Известно, что если число машин в первой автоколонне удвоить, то для перевозки 120 $т$ груза ей потребуется сделать на 5 рейсов меньше, чем второй автоколонне. Сколько тонн груза перевозит за один рейс вторая автоколонна?

2. Найти все решения уравнения

$$\sin 6x - \cos\left(4x + \frac{3\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\sin\left(5x - \frac{\pi}{2}\right).$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_6(7 - 2x) + \log_{\frac{1}{3}}(5x - 7y) = 0, \\ \sqrt{x+y+3} - \sqrt{8-2x} = \sqrt{3x+y-9}. \end{cases}$$

4. В равнобочную трапецию $ABCD$ вписана окружность, касающаяся нижнего основания AD в точке E. Верхнее основание BC равно a, угол $BAD = 60°$. Вторая окружность, целиком расположенная внутри трапеции, касается внешним образом первой (вписанной) окружности в точке K, касается основания AD в точке M и боковой стороны DC. Найти площадь фигуры KEM, ограниченной меньшей из дуг KE, меньшей из дуг MK и отрезком EM.

5. Найти все значения x, удовлетворяющие неравенству

$$\frac{\log_{\sqrt{5}}\left(x-\frac{4}{7}\right)+2}{\log_3\left|x-\frac{3}{5}\right|+\frac{1}{3}}>0.$$

Вариант 3

1. Из пункта А в пункт В, расположенный на противоположном берегу озера, одновременно вышли моторная лодка и катер. К моменту, когда катер прибыл в пункт В, моторная лодка прошла половину пути и была в 30 *км* от В. Известно, что если бы катер шел из А в Б с большей скоростью, увеличив ее на 3 *км/ч*, то лодка пришла бы в пункт В на 6 ч позже катера. Найти скорость моторной лодки.

2. Найти все решения уравнения

$$\sin x+\cos\left(5x-\frac{9\pi}{2}\right)=\sqrt{3}\sin(3x+\pi).$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 25\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2y-2}=\frac{1}{5^{2x}}, \\ \sqrt{x+2}+\sqrt{2x+y+14}=\sqrt{x+y+12}. \end{cases}$$

4. В треугольнике ABC боковые стороны AB и BC равны a, угол $ABC=120°$. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке D. Вторая окружность с центром в точке B проходит через точку D. Найти площадь той части вписанного круга, которая находится внутри второго круга.

5. Найти все значения x, удовлетворяющие неравенству

$$\frac{\log_3\left(x+\frac{4}{5}\right)}{\log_7\left(x^2-2x+\frac{7}{16}\right)}<0.$$

Вариант 4

1. Два насоса, работая одновременно, наполняют водой бассейн емкостью 60 $м^3$ за полтора часа. Известно, что если бы работал только один второй насос и его производительность была бы увеличена в полтора раза, то для наполнения бассейна потребовалось бы на 2 *ч* больше времени, чем для наполнения бассейна

с помощью только одного первого насоса. Сколько кубометров воды в час подает первый насос?

2. Найти все решения уравнения

$$\cos 5x - \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\cos(4x + 3\pi).$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2(10 - 3x) + \log_{\frac{1}{2}}(2x - 5y) = 0, \\ \sqrt{2x + y + 1} - \sqrt{11 - 3x} = \sqrt{4x + 2y - 12}. \end{cases}$$

4. В равносторонний треугольник ABC, сторона которого равна a, вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке D. Вторая окружность, расположенная внутри треугольника ABC, касается внешним образом первой (вписанной) окружности в точке K, касается стороны AB в точке M и стороны BC. Найти площадь фигуры DKM, ограниченной меньшей из дуг DK, меньшей из дуг KM и отрезком MD.

5. Найти все значения x, удовлетворяющие неравенству

$$\frac{49x^2 - 63x + 20}{\log_{\sqrt{5}}|5x - 3| - 2} > 0.$$

Разбор варианта 1

Задача 1. Обозначим скорости велосипедиста и пешехода буквами u и v соответственно. Понятно, что $u > 4$. Уравнения задачи имеют вид

$$\begin{cases} \frac{24}{v} - \frac{24}{u} = 4, \\ 2 \cdot \frac{24}{u - 4} = \frac{24}{v}. \end{cases}$$

Исключая из этих уравнений u, получим квадратное уравнение для скорости пешехода v:

$$v^2 - v - 12 = 0.$$

Его положительное решение: $v = 4$. Нетрудно подсчитать, что в этом случае u равно 12 *км/ч*, т. е. $u > 4$.

Ответ: 4 *км/ч*.

Задача 2. Воспользуемся известными формулами:

$$\sin\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) = -\cos x; \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x.$$

Тогда имеем

$$\cos 3x - \cos x = \sqrt{3}\sin x$$

и далее

$$-2\sin 2x \sin x = \sqrt{3}\sin x.$$

Возможны два случая:

1) $\sin x = 0$; $x = \pi n$.

2) $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $2x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n$,

$$x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}.$$

Ответ: $x = \pi n$; $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$,

Задача 3. Из первого уравнения системы имеем:

$$\frac{4}{2^{y-x}} = \frac{1}{2^{x+2}},$$

$$\frac{1}{2^{y-x-2}} = \frac{1}{2^{x+2}},$$

$$y - x - 2 = x + 2,$$

$$y = 2x + 4.$$

Исключая с помощью этого соотношения y из второго уравнения системы, получаем иррациональное уравнение

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{8x+13} = \sqrt{6x+12}.$$

Очевидно, что допустимыми являются те x, которые удовлетворяют неравенству $x \geqslant -1/2$. Поскольку обе части уравнения неотрицательны, то после их возведения в квадрат получится уравнение, равносильное исходному:

$$\sqrt{(2x+1)(8x+13)} = -(2x+1). \qquad (1)$$

Заметим, что для существования действительных решений у этого уравнения необходимо, чтобы выполнялось условие

$$2x + 1 \leqslant 0 \text{ или } x \leqslant -\frac{1}{2}.$$

Сравнивая это условие с условием, ограничивающим ОДЗ, получаем, что x может равняться только $-1/2$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $x = -1/2$ есть решение уравнения (1). Таким образом, $x = -1/2$, а $y = 3$.

Ответ: $x = -1/2$, $y = 3$.

Задача 4. На рис. 14 представлен чертеж к этой задаче. Очевидно, что первая окружность вписана в равнобедренный прямо-

угольный треугольник ABC и ее центр O лежит на пересечении биссектрис этого треугольника. Поэтому радиус OF, проведенный из центра окружности к точке касания F со стороной AC, является частью высоты BF равнобедренного треугольника ABC. Понятно также, что $AE=AF$; поэтому нетрудно рассчитать значения радиусов обеих окружностей r и R, первой и второй соответственно:

$$R=\frac{a\sqrt{2}}{2};\quad r=a-\frac{a\sqrt{2}}{2}=a\,\frac{2-\sqrt{2}}{2}.$$

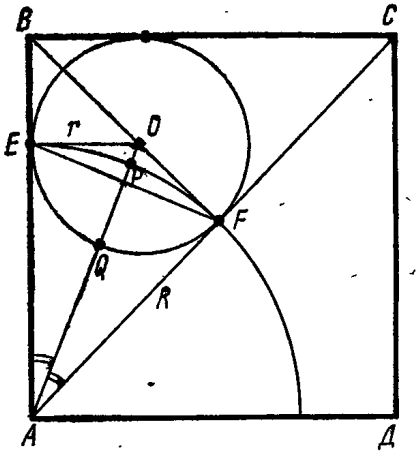


Рис. 14.

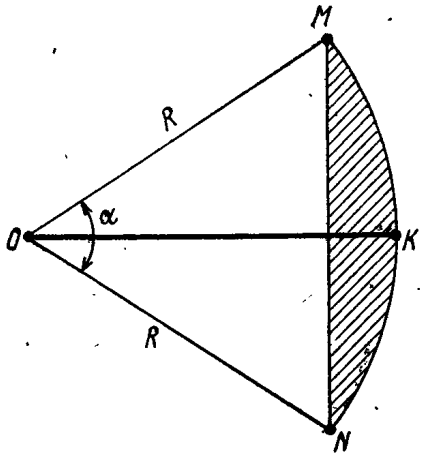


Рис. 15.

Для вычисления площади общей части кругов воспользуемся формулой для площади сегмента в окружности радиуса R, имеющего дугу α, рис. 15:

$$S_{MNK}=S_{OMKN}-S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}R^2\alpha-\frac{1}{2}R^2\sin\alpha;$$

$$\boxed{S_{MNK}=\frac{1}{2}R^2(\alpha-\sin\alpha)}.$$

Для сегмента EPF второй окружности дуга равна $\pi/4$; для сегмента EQF первой окружности $-3\pi/4$. Поэтому имеем

$$S_{EPF}=\frac{1}{2}R^2\left(\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\right);$$

$$S_{EQF}=\frac{1}{2}r^2\left(\frac{3\pi}{4}-\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Складывая эти выражения, получим величину искомой площади:

$$S_{EQFPE}=\frac{1}{2}R^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{1}{2}r^2\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

После подстановки выражений для радиусов обеих окружностей имеем:

$$S_{EQFPE}=\frac{a^2}{8}(\sqrt{2}-1)[(2\sqrt{2}-1)\pi-4].$$

Ответ: $a^2(\sqrt{2}-1)[(2\sqrt{2}-1)\pi-4]/8$.

Задача 5. В области допустимых значений неизвестного данное неравенство равносильно следующим системам неравенств:

1. $\begin{cases}4x^2+12x+5>0,\\ \log_8\left(x^2+2x+\frac{7}{16}\right)>0;\end{cases}$

2. $\begin{cases}4x^2+12x+5<0,\\ \log_8\left(x^2+2x+\frac{7}{16}\right)<0.\end{cases}$

Решим поочередно каждую из этих систем.

1. $\begin{cases}4x^2+12x+5>0, \Rightarrow x<-\frac{5}{2},\ x>-\frac{1}{2};\\ x^2+2x+\frac{7}{16}>1, \Rightarrow x<-\frac{9}{4},\ x>\frac{1}{4}.\end{cases}$

Объединяя найденные множества, получим:

$$x<-\frac{5}{2} \text{ и } x>\frac{1}{4}.$$

2. $\begin{cases}4x^2+12x+5<0, \Rightarrow -\frac{5}{2}<x<-\frac{1}{2};\\ 0<x^2+2x+\frac{7}{16}<1, \Rightarrow -\frac{9}{4}<x<-\frac{7}{4},\\ -\frac{1}{4}<x<\frac{1}{4}.\end{cases}$

Объединяя найденные множества, получим:

$$-\frac{9}{4}<x<-\frac{7}{4}.$$

Ответ: $x<-5/2;\ -9/4<x<-7/4;\ x>1/4$.

§ 4. ГЕОГРАФИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, 1975 г.

Вариант 1

1. Бассейн может наполняться водой с помощью двух насосов разной производительности. Если половину бассейна наполнить, включив лишь первый насос, а затем, выключив его, продолжить наполнение с помощью второго насоса, то весь бассейн наполнит-

ся за 2 *ч* 30 *мин*. При одновременной работе обоих насосов бассейн наполняется за 1 *ч* 12 *мин*. Какую часть бассейна наполняет за 20 *мин* работы насос меньшей производительности?

2. Решить уравнение

$$\sin^2 x - \cos x \cdot \cos 3x = \frac{1}{4}.$$

3. Решить уравнение

$$49^{2\log_4(x-2)} \cdot 7^{\log_{\sqrt{2}}\sqrt{12-x}} = 49^{\log_2\sqrt{\left(1-\frac{2}{x}\right)^3}} \cdot 7^{4\log_8 x}.$$

4. В треугольнике ABC биссектриса AK перпендикулярна медиане BM, а угол ABC равен 120°. Найти отношение площади треугольника ABC к площади описанного около этого треугольника круга.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg}\dfrac{y-5}{2}, \\ 2x + 3\log_{\frac{4x}{\pi}}\sqrt[3]{\dfrac{\pi^2 x}{16}} = \\ = \dfrac{3}{4}\log_{\sqrt[4]{\frac{4x}{\pi}}}\left(\dfrac{4x^2}{\pi}\right) - 4^{3\log_8\sqrt{y}}. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Моторная лодка, пройдя 20 *км* по спокойной воде озера, вошла в вытекающую из озера реку и, сразу выключив мотор, проплыла по течению реки еще 5 *км*. Весь описанный путь занял 2 *ч*. Затем лодка развернулась и, двигаясь относительно воды с той же скоростью, как и в начале пути, когда она шла первые 20 *км*, вернулась к озеру через 20 *мин* после разворота. Какова скорость течения?

2. Решить уравнение

$$12\cos^2\frac{x}{2} = 9 - 4\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{3x}{2}.$$

3. Решить уравнение

$$6^{\log_8\left(1-\frac{1}{2x}\right)} = 6^{\log_{\sqrt{5}}\frac{2x-1}{\sqrt{9-x^2}}} \cdot 36^{\log_{25}(3+x)}.$$

4. В треугольнике ABC биссектриса AH делит медиану BE в отношении $BK:KE=2$, а угол ACB равен 30°. Найти отношение площади треугольника BCE к площади описанного около этого треугольника круга.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} 4x = \operatorname{tg}\dfrac{y-8}{3}, \\ 4\log_{\frac{6x}{\pi}}\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + 27^{2\log_9 \sqrt[3]{y}} = 2\log_{\sqrt{\frac{6x}{\pi}}}\left(\dfrac{6x^2}{\pi}\right) - 3x. \end{cases}$$

Вариант 3

1. Две артели с разным числом мастеров одинаковой квалификации начали изготовлять шапки, причем каждый мастер делал по две шапки в день. Сперва работала только первая артель, выпустившая 32 шапки. Затем ее сменила вторая артель, выпустившая еще 48 шапок. Вся эта работа заняла 4 дня. После этого артели стали работать вместе и за следующие 6 дней изготовили еще 240 шапок. Сколько мастеров в каждой артели?

2. Решить уравнение

$$2\sin^3 x = \frac{3}{2} + \sin x \cdot \sin 3x.$$

3. Решить уравнение

$$2^{\log_{\sqrt{7}}\left(3-\frac{2}{x}\right)} \cdot 4^{\log_{49} x^2} = 8^{\log_7 \sqrt[3]{\frac{x}{4-x}}} \cdot 8^{\log_7 (3x-2)}.$$

4. В треугольнике ABC высота BH делит сторону AC в отношении $AH : HC = 4$, а угол HBC вдвое меньше угла BAC. Биссектриса AE угла BAC пересекается с BH в точке K. Найти отношение площади треугольника ABK к площади описанного около этого треугольника круга.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(y-5), \\ 3x - 2\log_{\frac{4x}{\pi}} \sqrt{\dfrac{64x^3}{\pi^5}} = \log_{\sqrt{\frac{4x}{\pi}}}(4x) - 25^{-\frac{1}{5}\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{y^2}}. \end{cases}$$

Вариант 4

1. Человек в лодке начал грести против течения быстрой реки. Однако через 4 *мин* лодка оказалась на 80 *м* ниже по течению. Развернув ее, он перестал грести, и, пока он отдыхал, лодку снесло на 40 *м*. Затем он принялся грести по течению, причем лодка двигалась относительно воды с той же скоростью, как и в первые 4 *мин*, и прошла относительно берега еще 40 *м*. В целом после разворота лодки прошло 100 *сек*. Какова скорость течения?

2. Решить уравнение

$$\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{3x}{2}=\frac{1}{4}-\cos^2\frac{x}{2}.$$

3. Решить уравнение

$$5^{\log_{\sqrt{3}}(x-1)}=25^{\log_3\sqrt{x^2-1}}\cdot 25^{\log_9\frac{x^2-1}{4x^2-7}}.$$

4. В треугольнике ABC биссектриса AH пересекает высоты BP и CT в точках K и M соответственно, причем эти точки лежат внутри треугольника. Известно, что $BK:KP=2$ и $MT:KP=3/2$. Найти отношение площади треугольника PBC к площади описанного около этого треугольника круга.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} 4x=\operatorname{ctg}\dfrac{7-y}{3}, \\ 3x+4\log_{\frac{3x}{\pi}}\sqrt[4]{\dfrac{\pi^3x}{27}}=2\log_{\sqrt{\frac{3x}{\pi}}}\left(\dfrac{3x^2}{\pi}\right)-36^{-\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{6}}\sqrt{y^3}}. \end{cases}$$

Разбор варианта 1

Задача 1. Обозначим производительности насосов v_1 и v_2 соответственно, а объем бассейна примем за единицу. Тогда условия задачи приводят к системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2v_1}+\dfrac{1}{2v_2}=\dfrac{5}{2}, \\ \dfrac{6}{5}(v_1+v_2)=1. \end{cases}$$

Эти систему нетрудно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{cases} v_1+v_2=\dfrac{5}{6}, \\ v_1v_2=\dfrac{1}{6}. \end{cases}$$

Отсюда определяем, что производительность каждого из насосов может равняться либо $1/2$ либо $1/3$. Поскольку требуется определить, какую часть бассейна наполняет за 20 *мин* насос меньшей производительности, то берем решение $v_1=1/3$, т. е. насос меньшей производительности наполняет за час $1/3$ часть бассейна. Тогда за 20 *мин* он наполняет $1/9$ часть бассейна.

Ответ: $1/9$.

Задача 2. Преобразуя произведение косинусов в условии задачи в сумму

$$\cos x \cdot \cos 3x = \frac{1}{2}[\cos 4x + \cos 2x],$$

запишем уравнение в следующем виде:

$$\sin^2 x - \frac{1}{2}[\cos 4x + \cos 2x] = \frac{1}{4}$$

и далее

$$\frac{1-\cos 2x}{2} - \frac{1}{2}[2\cos^2 2x - 1 + \cos 2x] = \frac{1}{4},$$

$$4\cos^2 2x + 4\cos 2x - 3 = 0.$$

Это уравнение относительно $\cos 2x$ имеет единственное решение:

$$\cos 2x = \frac{1}{2}.$$

Второе значение $\cos 2x = -3/2$ не годится, поскольку $|\cos 2x| \leqslant 1$.

Таким образом,

$$\cos 2x = \frac{1}{2},$$

$$2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,$$

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k.$$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$.

Задача 3. Область допустимых значений неизвестного определяется из системы неравенств:

$$\begin{cases} x - 2 > 0, \\ 12 - x > 0, \\ x > 0, \\ 1 - \frac{2}{x} > 0. \end{cases}$$

Решение этой системы показывает, что $2 < x < 12$.

Уравнение можно записать следующим образом:

$$7^{4\log_4(x-2)} \cdot 7^{\log_{\sqrt{2}}\sqrt{12-x}} = 7^{2\log_2\sqrt{\left(1-\frac{2}{x}\right)^3}} \cdot 7^{4\log_2 x},$$

откуда следует другое уравнение:

$$2\log_2(x-2) + \log_2(12-x) = 3\log_2\frac{x-2}{x} + 4\log_2 x.$$

После приведения подобных членов и потенцирования получим

$$\log_2(12-x)=\log_2[x(x-2)],$$

$$12-x=x^2-2x,$$

$$x^2-x-12=0.$$

Корни последнего уравнения равны

$$x_1=4,\ x_2=-3.$$

Из этих значений только одно удовлетворяет условию $2<x<12$.

Ответ: $x=4$.

Задача 4. Обозначим K' точку пересечения биссектрисы AK треугольника ABC с его медианой BM, рис. 16. Очевидно, что прямоугольные треугольники ABK' и AMK' равны между собой (по острому углу и общей стороне), откуда следует, что $AB=AM$ и, значит, $AC=2\cdot AB$.

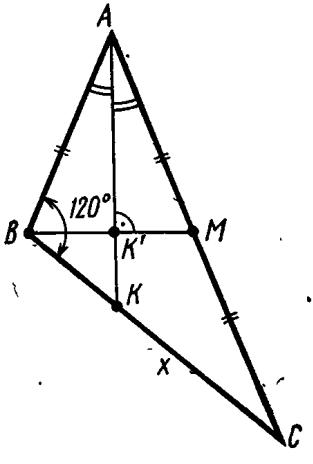


Рис. 16.

Обозначим радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC, через R. По теореме синусов:

$$\frac{AC}{\sin 120^\circ}=2R,$$

откуда

$$AC=2R\cdot\sin 120^\circ=R\sqrt{3}.$$

Обозначим сторону BC треугольника ABC через x и применим теорему косинусов:

$$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos 120^\circ,$$

$$3R^2=\frac{3}{4}R^2+x^2-2\cdot x\cdot\frac{R\sqrt{3}}{2}\cos 120^\circ.$$

После упрощений получим квадратное уравнение

$$x^2+\frac{R\sqrt{3}}{2}x-\frac{9}{4}R^2=0,$$

положительный корень которого равен

$$\frac{R\sqrt{3}(\sqrt{13}-1)}{4}.$$

Искомое отношение площадей определяется следующим образом:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{кр}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{R\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{R\sqrt{3}(\sqrt{13}-1)}{4}\cdot\sin 120^\circ}{\pi R^2}=\frac{3\sqrt{3}(\sqrt{13}-1)}{32\pi}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}(\sqrt{13}-1)}{32\pi}$.

Задача 5. Область допустимых значений неизвестных определяется в этой задаче из следующей системы условий:

$$\begin{cases} 3x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k; \quad \frac{y-5}{2}\neq\frac{\pi}{2}+\pi m; \\ \frac{4x}{\pi}>0; \ \frac{4x}{\pi}\neq 1; \ x>0; \ y>0, \end{cases}$$

откуда следует, что

$$\begin{cases} x\neq\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}; \ y\neq 5+\pi+2\pi m; \\ x>0; \ y>0; \ x\neq\frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Преобразуем отдельно члены второго уравнения системы.

1. $3\log_{\frac{4x}{\pi}}\sqrt[3]{\frac{\pi^2x}{16}}=\frac{\log_2\frac{\pi^2x}{16}}{\log_2\frac{4x}{\pi}}=\frac{2\log_2\pi+\log_2x-4}{\log_2x+2-\log_2\pi}$;

2. $\log_{\sqrt[4]{\frac{4x}{\pi}}}\left(\frac{4x^2}{\pi}\right)=\frac{\log_2\frac{4x^2}{\pi}}{\log_2\sqrt[4]{\frac{4x}{\pi}}}=\frac{2+2\log_2x-\log_2\pi}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\log_2x-\frac{1}{4}\log_2\pi}$;

3. $4^{3\log_2\sqrt{y}}=8^{\frac{2}{3}\cdot 3\log_2\sqrt{y}}=8^{\log_2 y}=y$.

Подставляя полученные выражения во второе уравнение, получим

$$2x-5=-y,$$
$$\frac{y-5}{2}=-x.$$

Используя этот результат, запишем первое уравнение системы в более простом виде:

$$\operatorname{tg}3x=\operatorname{tg}(-x)$$

или

$$\operatorname{tg}3x+\operatorname{tg}x=0,$$
$$\frac{\sin 4x}{\cos 3x\cdot\cos x}=0.$$

Решения этого уравнения имеют вид

$$4x = \pi n,$$

$$x = \frac{\pi n}{4}, \text{ где } n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots .$$

Соответствующие y определяются формулой

$$y = 5 - \frac{\pi n}{2}.$$

Найдем, какие ограничения накладываются областью допустимых значений. Прежде всего, из условий $x > 0$ и $x \neq \frac{\pi}{4}$ следует, что $n = 2, 3, 4 \ldots$, а условие $y > 0$ показывает, что годятся только $n = 2$ и $n = 3$. Таким образом, возможна только пара решений:

$$\begin{cases} x = \pi/2, \\ y = 5 - \pi; \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x = 3\pi/4, \\ y = 5 - \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

Однако первая из этих пар также не годится, поскольку в этом случае не определены тангенсы, входящие в условие задачи. Единственно возможное решение определяется второй системой.

Ответ: $x = 3\pi/4$, $y = 5 - 3\pi/2$.

§ 5. БИОЛОГО-ПОЧВЕННЫЙ ФАКУЛЬТЕТ, 1972 г.

Вариант 1

1. Два пешехода одновременно выходят навстречу друг другу из пунктов А и В и встречаются через три часа. Если бы они оба вышли из пункта А и пошли в пункт В, причем второй вышел бы на три часа позднее первого, то второй пешеход догнал бы первого, пройдя две трети расстояния от пункта А до пункта В. Сколько времени потребуется первому пешеходу на путь из пункта А в пункт В?

2. Упростить выражение

$$\operatorname{tg} 2x \operatorname{ctg} (70° - x) + \operatorname{tg} 2x \operatorname{ctg} (20° - x) -$$

$$- \operatorname{ctg} (20° - x) \operatorname{ctg} (70° - x).$$

3. Решить уравнение

$$2^{\sqrt{\log_2 3}} = 3^{\sqrt{\log_3 4x - 0{,}75}}.$$

4. Найти все решения уравнения

$$\sin(\log_{\sqrt{x}} x^{\pi x}) + \sin \pi x + \cos \pi x + \cos(\log_x x^{2\pi x}) = 0.$$

5. В треугольнике ABC, площадь которого равна S, проведены биссектриса CE и медиана BD, пересекающиеся в точке O. Найти площадь четырехугольника $ADOE$, зная, что $BC=a$ и $AC=b$.

Вариант 2

1. Из города А в город В выезжает автомобиль, и одновременно из города В в город А выезжает автобус. Через четыре часа они встречаются. Автомобиль приходит в город В на 3 *ч* 20 *мин* раньше, чем автобус приходит в город А.

Сколько времени затрачивает автомобиль на путь из города А в город В?

2. Упростить выражение

$$\frac{1 - \sin(180° + 3x)\cos(270° + 5x) + \cos(540° - 3x)\cdot\sin(450° + 5x)}{[4 + (\operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 2x)^2]^{-1}}.$$

3. Решить уравнение

$$(\sqrt{x})^{\log_{16}(9x)} = (\sqrt{3})^{\frac{1}{\log_3 \sqrt{2}}}.$$

4. Найти все решения уравнения

$$\frac{\cos(\log_{x^3} x^{\pi x}) - \sin(\log_x [\sqrt[3]{x}]^{\pi x}) + 1}{\cos\frac{\pi x}{3} + \sin\frac{\pi x}{3} - 1} = \sqrt{3}.$$

5. В трапеции $ABCD$ биссектриса угла A пересекает боковую сторону BC в точке E. Найти площадь треугольника ABE, если известно, что площадь трапеции равна S, ее основание $AB=a$, $AD=b$, $CD=c$, $c<a$.

Вариант 3

1. Из пункта А отправляется машина, а через час мотоцикл, который догоняет машину в пункте В. В этот момент из А отправляется второй мотоцикл, идущий с той же скоростью, что и первый. Второй мотоцикл догоняет машину через шесть часов после своего отправления.

За какое время мотоцикл проходит путь из пункта А в пункт В?

2. Упростить выражение

$$\operatorname{tg} 4x \operatorname{tg}(40°-2x) + \operatorname{tg} 4x \operatorname{tg}(50°-2x) + \operatorname{tg}(50°-2x) \operatorname{tg}(40°-2x).$$

3. Решить уравнение

$$5^{\sqrt{(\log_5 x+\log_5 9)\log_5 9}}=3^{\sqrt{\log_3 1{,}8}}.$$

4. Найти все решения уравнения

$$\sin \pi x+\sin (\log_x x^{3\pi x})=\cos \pi x-\cos (\log_{\sqrt{x}} x^{\pi x}).$$

5. В треугольнике ABC биссектрисы AD и BE пересекаются в точке O. Найти отношение площади треугольника ABC к площади четырехугольника $ODCE$, зная, что $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$.

Вариант 4

1. Три поезда выехали одновременно: пассажирский из города A в город B, а скорый и товарный из города B в город A. Пассажирский и скорый поезда встретились через 4 *ч*. Скорый поезд пришел в город A на 7 *ч* раньше товарного. Скорость пассажирского поезда в полтора раза больше скорости товарного.

За какое время товарный поезд прошел путь от города B до города A?

2. Упростить выражение

$$\frac{\sin (2x-540^\circ)\sin (4x-180^\circ)-\sin (2x-270^\circ)\sin (450^\circ-4x)-1}{[4+16(\operatorname{tg} 1{,}5x-\operatorname{ctg} 1{,}5x)^{-2}]^{-1}}.$$

3. Решить уравнение

$$7^{\log^2_{25}(5x)-1}-x^{\log_5 7}=0.$$

4. Найти все решения уравнения

$$(1+\sqrt{3})\cos (\log_{\sqrt{x}} x^x)+(\sqrt{3}-1)(\sin 2x-1)=0.$$

5. В параллелограмме $ABCD$ точка E делит пополам сторону CD, биссектриса угла ABC пересекает в точке O отрезок AE. Найти площадь четырехугольника $OBCE$, зная, что $AD=a$, $DE=b$, $\angle ABO=\alpha$.

Разбор варианта 1

Задача 1. Анализируя условие задачи, замечаем, что величины с размерностью длины в условие задачи не входят. Поэтому можно ввести единицу длины, приняв за нее расстояние между пунктами A и B. Введем далее в качестве неизвестных скорости пешеходов v_1 и v_2 *ед. дл/ч*. Тогда искомое время $t=1/v_1$, причем $t>3$.

Условия задачи можно записать теперь в виде системы уравнений

$$\begin{cases} 3(v_1+v_2)=1, \\ \frac{2/3}{v_1}=\frac{2/3}{v_2}+3. \end{cases}$$

Учитывая, что $v={}^1/_3-v_1$ согласно первому уравнению этой системы, из второго уравнения находим

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{v_1}-\frac{1}{v_2}\right)=3,$$

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{v_1}-\frac{1}{1/3-v_1}\right)=3,$$

$$9v_1^2-7v_1+\frac{2}{3}=0.$$

Корни последнего квадратного уравнения — $v_1={}^2/_3$ и $v_1={}^1/_9$, следовательно, $t_1={}^3/_2$ и $t_2=9$. Поскольку $t>3$, лишь второе значение дает решение задачи.

Ответ: $t=9$ *ч.*

Задача 2. Заметим, что данное тригонометрическое выражение определено при условиях:

$$\cos 2x\neq 0,\quad \sin(70^\circ-x)\neq 0,\quad \sin(20^\circ-x)\neq 0,$$

т. е.

$$x\neq 45^\circ+90^\circ n,\quad x\neq 20^\circ+180^\circ n,\quad x\neq 70^\circ+180^\circ n.$$

Используя представление тангенса и котангенса через синус и косинус, а также формулы для синуса и косинуса разности аргументов, получаем

$$\operatorname{tg}2x\operatorname{ctg}(70^\circ-x)+\operatorname{tg}2x\operatorname{ctg}(20^\circ-x)-$$

$$-\operatorname{ctg}(20^\circ-x)\operatorname{ctg}(70^\circ-x)=\operatorname{tg}2x\left[\frac{\sin(20^\circ+x)}{\cos(20^\circ+x)}+\frac{\cos(20^\circ-x)}{\sin(20^\circ-x)}\right]-$$

$$-\operatorname{tg}(20^\circ+x)\operatorname{ctg}(20^\circ-x)=\frac{\sin 2x-\sin(20^\circ+x)\cos(20^\circ-x)}{\cos(20^\circ+x)\sin(20^\circ-x)}=$$

$$=\frac{\sin 2x-\frac{1}{2}(\sin 40^\circ+\sin 2x)}{\frac{1}{2}(\sin 40^\circ-\sin 2x)}=\frac{\sin 2x-\sin 40^\circ}{\sin 40^\circ-\sin 2x}=-1.$$

Ответ: -1, при x, удовлетворяющих указанным выше ограничениям.

Задача 3. Логарифмируя обе части уравнения по основанию 3, получаем равносильное уравнение

$$\sqrt{\log_3 3\cdot\log_3 2}=\sqrt{\log_3 4x-\frac{3}{4}}. \qquad (1)$$

Возводя в квадрат обе части этого уравнения, получаем

$$\log_3 2 = \log_9 4 + \log_9 x - \frac{3}{4}. \qquad (2)$$

Следует отметить, что последнее уравнение также равносильно исходному. Поскольку очевидно, что число $\log_3 2$ положительно, при возведении в квадрат обеих частей уравнения (1) посторонних корней получиться не может. Кроме того, здесь нет необходимости проверять, выполняется ли ограничение, налагаемое на неизвестное x неотрицательностью подкоренного выражения. Для тех значений x, которые удовлетворяют уравнению (2) это, очевидно, выполняется: после возведения в квадрат подкоренное выражение равно квадрату некоторого числа и, значит, неотрицательно.

Далее находим

$$\log_9 x = \frac{3}{4} \text{ и } x = 9^{3/4} = 3\sqrt{3}.$$

Ответ: $x = 3\sqrt{3}$.

Задача 4. Выполним вычисления:

$$\log_{\sqrt{x}} x^{\pi x} = 2\pi x \text{ и } \log_x x^{2\pi x} = 2\pi x.$$

Эти преобразования являются равносильными на множестве допустимых значений

$$x > 0,\ x \neq 1.$$

Обозначая далее $y = \pi x$, получаем уравнение

$$\sin 2y + \cos 2y + \sin y + \cos y = 0.$$

Используя преобразование, известное под названием *«введение вспомогательного аргумента»*, запишем это уравнение в виде:

$$\sqrt{2}\cos\left(2y - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\cos\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

или

$$\cos\left(2y - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{4} - y\right).$$

Последнее равенство приводит к соотношениям

$$2y - \frac{\pi}{4} = \pm\left(\frac{5\pi}{4} - y\right) + 2\pi k.$$

Отсюда находим:

а) $2\pi x - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} - \pi x + 2\pi k,$

$$3x = \frac{3}{2} + 2k,$$

$$x = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}k.$$

Условие $x>0$ показывает, что $k=0, +1, +2, \ldots$.

б) $2\pi x - \frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4} + \pi x + 2\pi k.$

Отсюда

$$x = -1 + 2k.$$

Условия $x>0$ и $x\neq 1$ показывают, что $k=+2, +3, \ldots$.

Ответ: $x=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}k$ при $k=0, 1, 2, \ldots$; $x=-1+2k$, при $k=2, 3, 4, \ldots$.

Задача 5. Для решения данной задачи используем утверждение, подробно рассмотренное в этом пособии. Оно заключается в том, что при изменении сторон треугольника в m и n раз соответственно его площадь изменится в mn раз.

Площадь четырехугольника $ADOE$ может быть найдена как разность площадей $\triangle ABD$ и и $\triangle EBO$, рис. 17. Площадь первого из них равна, очевидно $S/2$, поскольку медиана BD делит площадь треугольника ABC пополам; площадь второго может быть определена путем подсчета двух отношений

$$m = \frac{EB}{AB} \text{ и } n = \frac{OB}{DB},$$

которые показывают, во сколько раз стороны треугольника EBO уменьшены по сравнению со сторонами треугольника ABD.

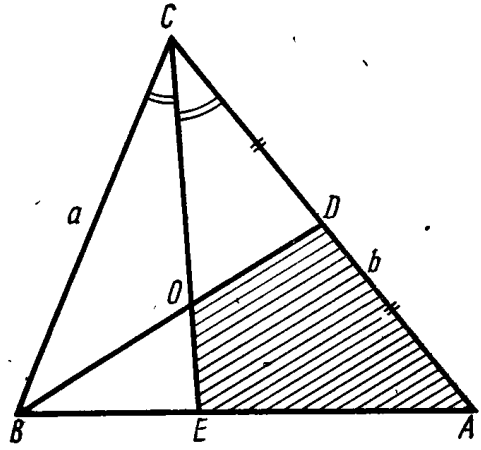


Рис. 17.

Величина m находится на основе теоремы о биссектрисе внутреннего угла треугольника:

$$\frac{EB}{EA} = \frac{a}{b}, \text{ т. е. } m = \frac{EB}{AB} = \frac{a}{a+b}.$$

Аналогичным образом находится и другое соотношение. Из треугольника BDC имеем

$$\frac{OB}{OD} = \frac{a}{b/2}, \text{ т. е. } n = \frac{a}{a+b/2}.$$

Поэтому отношение площадей $\triangle EBO$ и $\triangle ABD$ равно

$$\frac{S_{\triangle EBO}}{S_{\triangle ABD}} = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b/2} = \frac{2a^2}{(a+b)(2a+b)}.$$

Но площадь $\triangle ABD$ равна $S/2$. Значит,

$$S_{\triangle EBO} = \frac{S \cdot a^2}{(a+b)(2a+b)}.$$

Окончательно находим

$$S_{ADOE}=\frac{S}{2}-\frac{Sa^2}{(a+b)(2a+b)}=\frac{Sb(3a+b)}{2(a+b)(2a+b)}.$$

Ответ:

$$S_{ADOE}=\frac{Sb(3a+b)}{2(a+b)(2a+b)}.$$

§ 6. ФАКУЛЬТЕТ ПОЧВОВЕДЕНИЯ, 1973 г.

Вариант 1

1. Два экскаватора разной конструкции должны проложить две траншеи одинакового поперечного сечения длиной в 960 *м* и 180 *м*. Вся работа продолжалась 22 дня, в течение который первый экскаватор прокладывал бо́льшую траншею. Второй же экскаватор начал работать на 6 дней позднее первого, отрыл меньшую траншею, 3 дня ремонтировался и затем помогал первому.

Если бы не нужно было тратить времени на ремонт, то работа была бы кончена за 21 день.

Сколько метров траншеи может отрыть в день каждый экскаватор?

2. Что больше

$$(\log_{2\sqrt{2}}4)(\log_3\sqrt{3})^2 \text{ или } 2\sin\frac{\pi}{4}\cos^2\frac{23\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{37\pi}{4}?$$

3. Решить уравнение

$$(\cos x-\sin x)\left(1+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+\sin x=2\cos^2 x.$$

4. В окружность радиуса $(3+\sqrt{3})$ вписан правильный шестиугольник $ABCDEK$. Найти радиус круга, вписанного в треугольник ACD.

5. Найти все действительные решения уравнения

$$4^{3x^2+x}-8=2\cdot 8^{x^2+\frac{x}{3}}.$$

Вариант 2

1. Общий вес снаряжения туристской группы 202 *кг*. Если распределить его так, чтобы каждому юноше пришлось нести по 16 *кг*, а каждой девушке — по 9 *кг*, то 4 *кг* останутся нераспределенными. Поэтому юноши берут себе еще по 2 *кг*, в результате чего удается облегчить вес рюкзака каждой девушки на 1 *кг*, а одну из них освободить вовсе, причем все снаряжение оказывается распределенным.

Сколько юношей и сколько девушек в туристской группе?

2. Что больше

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\log_{81}\left(\frac{1}{27}\right)$$

или

$$\sin\frac{43\pi}{6}\cdot\operatorname{tg}^2\left(-\frac{8\pi}{3}\right)\cdot\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3}\ ?$$

3. Решить уравнение

$$\cos x\,(\sqrt{3}+\cos x)-1=\frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}-\sin x\,(\sqrt{3}+\sin x).$$

4. Две окружности радиуса 32 с центрами O_1 и O_2, пересекаясь, делят отрезок O_1O_2 на три равные части.

Найти радиус окружности, которая касается изнутри обеих данных окружностей и касается отрезка O_1O_2.

5. Найти все действительные решения уравнения

$$\log_2(x^2+7)=5+\log_2 x-\frac{6}{\log_2\left(x+\frac{7}{x}\right)}.$$

Вариант 3

1. В 9 часов утра из некоторого пункта выехал мотоциклист. Спустя 40 *мин* вдогонку по той же дороге выехал автомобиль. Через некоторое время из-за неисправности в моторе автомобиль остановился. На устранение неисправности ушло 10 *мин*, после чего автомобиль возобновил погоню и в 11 часов утра отставал от мотоциклиста на 40 *км*.

Если бы поломки не было, а мотоциклист ехал бы со скоростью, на 18 *км/ч* меньшей, чем была у него на самом деле, то автомобиль нагнал бы мотоциклиста в 10 часов 40 минут утра.

Найти скорости автомобиля и мотоциклиста.

2. Что больше

$$(\log_{16}32)\,(\log_{\frac{1}{8}}2\sqrt{2})^2$$

или

$$\cos^5\frac{19\pi}{4}\cdot\operatorname{ctg}\left(-\frac{17\pi}{6}\right)\cdot\operatorname{ctg}\frac{31\pi}{4}\ ?$$

3. Решить уравнение

$$(\sin 2x-1)\left(\sin x+\frac{\cos x}{2}\right)+\frac{\cos x}{2}=3\sin^2 x.$$

4. В окружность радиуса $(3+2\sqrt{3})$ вписан правильный шестиугольник *ABCDEK*. Найти радиус круга, вписанного в треугольник *BCD*.

5. Найти все действительные решения уравнения

$$2^{4(x+1)^2}=\frac{1}{2}+2\cdot 4^{x(x+2)}.$$

Вариант 4

1. Профсоюзный комитет выделил на покупку 7 путевок в дом отдыха и 20 путевок на турбазу 812 рублей. Однако оказалось, что путевки в дом отдыха стоят на 1 рубль дешевле, а на турбазу — на 4 рубля дешевле, чем планировалось. Поэтому, удалось купить дополнительно еще одну путевку в дом отдыха и 2 на турбазу, причем из выделенных денег осталось еще 4 рубля. Сколько стоит путевка в дом отдыха и сколько на турбазу?

2. Что больше

$$\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\log_{5\sqrt{5}}\frac{1}{125}\right)^2$$

или

$$\cos^2\frac{31\pi}{6}\ \operatorname{tg}\frac{29\pi}{6}\cdot\operatorname{tg}\frac{11\pi}{3}\ ?$$

3. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}x+\sin 2x+\frac{\cos x}{1+\sin x}=1+2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

4. Окружность радиуса $(1+\sqrt{2})$ описана около равнобедренного прямоугольного треугольника. Найти радиус окружности, которая касается катетов этого треугольника и внутренним образом касается описанной вокруг него окружности.

5. Найти все действительные решения уравнения

$$2+\log^2_{x+\frac{1}{8}}\frac{x}{2}=\log_{x+\frac{1}{8}}\frac{x^3}{8}.$$

Разбор варианта 1

Задача 1. Пусть v_1 и v_2 производительности первого и второго экскаваторов. Поскольку обе траншеи, которые прокладывают экскаваторы, имеют одинаковое поперечное сечение, условия задачи равносильны следующей системе уравнений:

$$\begin{cases}22v_1+13v_2=1140,\\ 21v_1+15v_2=1140,\end{cases}$$

решение которой легко находится: 40 *м/день* и 20 *м/день*.

Ответ: 40 *м/день*, 20 *м/день*.

Задача 2. Произведем вычисление каждого выражения в отдельности

$$1)\quad (\log_{2\sqrt{2}} 4)(\log_3 3\sqrt{3})^2 = (\log_{2^{\frac{3}{2}}} 2^2)(\log_3 3^{\frac{3}{2}})^2 = \frac{4}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4};$$

$$2)\quad 2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos^2\frac{23\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\frac{37\pi}{4} =$$

$$= 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cos^2\frac{7\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Надо сравнить числа 3/4 и $\sqrt{2}/2$. Очевидно, что первое из них, больше, чем второе.

Ответ: первое число больше второго.

Задача 3. Используя формулу синуса двойного угла, раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим

$$\cos x + \sin x\cos^2 x - \sin^2 x\cos x - 2\cos^2 x = 0,$$

$$\cos x(1 + \sin x\cos x - \sin^2 x - 2\cos x) = 0,$$

1) $\cos x = 0$, откуда $x = \pi/2 + \pi n$;

2) $1 + \sin x\cos x - \sin^2 x - 2\cos x = 0$,

или

$$\cos^2 x + \sin x\cos x - 2\cos x = 0,$$

$$\cos x(\cos x + \sin x - 2) = 0.$$

а) $\cos x = 0$, $x = \pi/2 + \pi n$;

б) $\cos x + \sin x = 2$.

Так как

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \sqrt{2},$$

то последнее уравнение не имеет решений.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$.

Задача 4. Пусть R — радиус круга (рис. 18). Так как $DC = R$, $AC = R\sqrt{3}$, а $AD = 2R$ и $\angle ACD = 90°$, то для определения радиуса вписанного в треугольник ACD круга r можно воспользоваться

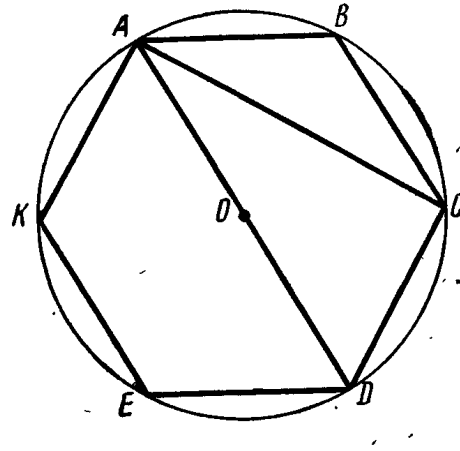


Рис. 18.

формулами для площади прямоугольного треугольника, записанной двумя различными способами:

$$S = p \cdot r = \frac{1}{2} ab.$$

Здесь p — полупериметр треугольника, a и b — его катеты. В нашем случае

$$p = 3(2+\sqrt{3}),\ a = 3+\sqrt{3} \text{ и } b = \sqrt{3}(3+\sqrt{3}).$$

Имеем:

$$3(\sqrt{3}+2)r = \frac{1}{2}\sqrt{3}(3+\sqrt{3}).$$

Отсюда находим $r = \sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

Задача 5. Сделав подстановку

$$2^{3x^2+x} = t > 0,$$

получим относительно t квадратное уравнение

$$t^2 - 2t - 8 = 0,$$

корни которого $t_1 = -2$ и $t_2 = 4$. Первый в силу положительности t не подходит; второй корень дает

$$2^{3x^2+x} = 4,\ 3x^2 + x = 2,$$

т. е. $3x^2 + x - 2 = 0$; $x_1 = -1$, $x_2 = {}^2/_3$.

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = {}^2/_3$.

§ 7. БИОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, 1973 г.

Вариант 1

1. Три каменщика (разной квалификации) выложили кирпичную стенку, причем первый каменщик проработал 6 *ч*, второй — 4 *ч* и третий — 7 *ч*. Если бы первый каменщик работал 4 *ч*, второй — 2, третий — 5 *ч*, то было бы выполнено лишь ${}^2/_3$ всей работы. За сколько часов каменщики закончили бы кладку, если бы они работали все вместе одно и то же время?

2. Решить уравнение

$$2\cos 2x - 1 = (2\cos 2x + 1)\operatorname{tg} x.$$

3. Решить уравнение

$$\log_{\sin 2x}(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) = 1 - \log^2_{\sin 2x} 2.$$

4. Через середину M стороны BC параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1, и вершину A проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке O.

Найти площадь четырехугольника $OMCD$.

5. Найти все значения действительного параметра a, для которых неравенство

$$4^x - a \cdot 2^x - a + 3 \leqslant 0$$

имеет хотя бы одно решение.

Вариант 2

1. Из пункта А в пункт В вышел пешеход; одновременно с ним в ту же сторону выехали велосипедист и автомобиль. Через час, когда автомобиль проехал $^5/_6$ расстояния до В, расстояние между ним и велосипедистом было в четыре раза больше, чем расстояние между велосипедистом и пешеходом. В этот момент велосипед сломался. Когда пешеход прошел еще 760 *м*, автомобилю осталось проехать до В еще 4,8 *км* и в этот момент расстояние между автомобилем и велосипедистом (оставшимся на месте поломки) оказалось в пять раз больше, чем расстояние между велосипедистом и пешеходом.

Чему равна скорость пешехода?

2. Решить уравнение

$$\frac{1}{\sin 2x} - \operatorname{ctg} 2x = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}(\operatorname{ctg} x - 1).$$

3. Решить уравнение

$$2 \cdot 3^{\operatorname{tg}^2 x} + 1 = 3^{\frac{3-\cos 2x}{3+\cos 2x}}.$$

4. Центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC лежат по разные стороны от прямой AB. Длина стороны AB равна радиусу описанной окружности. O—центр вписанной окружности.

Чему равен угол AOB?

5. Найти все значения действительного параметра c, для которых неравенство

$$1 + \log_5(x^2+1) \geqslant \log_5(cx^2 + 4x + c)$$

справедливо при всех x?

Вариант 3

1. Три бригады вспахали два поля общей площадью в 120 *га*. Первое поле было вспахано за три дня, причем все три бригады работали вместе. Второе поле было вспахано за шесть дней первой и второй бригадами.

Если бы все три бригады проработали на втором поле один день, то оставшуюся часть второго поля первая бригада могла бы вспахать за 8 дней.

Сколько гектаров в день вспахивает вторая бригада?

2. Решить уравнение

$$\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2 x \cdot \sin 2x = \operatorname{tg} x - \frac{3}{4\sin 2x}.$$

3. Решить уравнение

$$\log_{\sin x}(1-\cos 2x) = \log^2_{\sin 2x} 2.$$

4. Четырехугольник $ABCD$ обладает тем свойством, что около него можно описать и в него можно вписать окружности. Диагонали этого четырехугольника перпендикулярны, $AB=CD$ и радиус вписанной окружности равен 1.

Чему равна площадь четырехугольника $ABCD$?

5. Найти все значения действительного параметра α при которых неравенство

$$\alpha \cdot 9^x + 4(\alpha-1)\cdot 3^x + \alpha > 1$$

справедливо при всех x.

Вариант 4

1. В одном из отсеков судна возникла течь, и отсек оказался целиком заполненным водой. Для откачки воды включили два насоса разной производительности. Течь была устранена через 18 *ч*, после этого второй насос выключили и еще через 12 *ч* воды в отсеке не осталось.

Если бы течь устранить не удалось, то два насоса осушили бы отсек наполовину через 10 *ч* совместной работы.

За какое время второй насос осушил бы отсек наполовину, если бы не удалось устранить течь?

2. Решить уравнение

$$\frac{\sin^4\frac{x}{2}+\cos^4\frac{x}{2}}{1-\sin x} - \operatorname{tg}^2 x \cdot \sin x = \frac{1+\sin x}{2} + \operatorname{tg}^2 x.$$

3. Решить уравнение

$$2^{\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 x}} + 3\cdot 2^{\frac{3+\cos 2x}{2}} = 8.$$

4. В круге проведены два диаметра AB и CD, M — некоторая точка. Известно, что $AM=15$, $BM=20$, $CM=24$. Чему равно DM?

5. Найти все значения действительного параметра c, для которых неравенство

$$1+\log_2\left(2x^2+2x+\frac{7}{2}\right)\geqslant\log_2(cx^2+c)$$

имеет хотя бы одно решение?

Разбор варианта 1

Задача 1. Обозначим объем всей работы через Q единиц, а производительность работы каждого каменщика — v_1, v_2, v_3 соответственно. Тогда условия задачи дают два уравнения:

$$\begin{cases} 6v_1+4v_2+7v_3=Q, \\ 4v_1+2v_2+5v_3=\frac{2}{3}Q. \end{cases}$$

Получаются два уравнения с четырьмя неизвестными, из которых сами неизвестные, разумеется, не могут быть найдены однозначно.

Условие задачи требует найти не каждую неизвестную в отдельности, а лишь отношение

$$\frac{Q}{v_1+v_2+v_3}.$$

Это можно сделать, заметив, что из составленной выше системы уравнений легко находится сумма производительностей работы каменщиков*. Вычитая из первого уравнения системы второе, получим

$$2(v_1+v_2+v_3)=\frac{1}{3}Q,$$

или

$$\frac{Q}{v_1+v_2+v_3}=6.$$

Ответ: 6 *ч.*

Задача 2. Прежде всего отметим, что

$$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi.$$

Воспользуемся формулами

$$\cos 2x=\cos^2x-\sin^2x;$$

$$1=\cos^2x+\sin^2x.$$

---

* Подробнее об этом и других типах задач на составление уравнений можно прочитать в книге М. В. Лурье и Б. И. Александрова «Задачи на составление уравнений». М.—Л., «Наука», 1976.

Тогда очевидны следующие преобразования:

$$2\cos 2x - 1 = (2\cos 2x + 1)\frac{\sin x}{\cos x},$$

$$\cos^2 x - 3\sin^2 x = (3\cos^2 x - \sin^2 x)\frac{\sin x}{\cos x},$$

$$\cos^3 x + \sin^3 x = 3\sin x \cos x\,(\sin x + \cos x),$$

$$(\cos x + \sin x)(1 - \sin x \cos x) = (\cos x + \sin x)\cdot 3\sin x \cos x,$$

$$(\cos x + \sin x)(1 - 4\sin x \cos x) = 0,$$

$$(\cos x + \sin x)(1 - 2\sin 2x) = 0.$$

Далее находим

1) $\cos x + \sin x = 0$,

$$\operatorname{tg} x = -1,$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi;$$

2) $1 - 2\sin 2x = 0$,

$$\sin 2x = \frac{1}{2},$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}.$$

Ответ:

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}.$$

Задача 3. Отметим прежде всего область допустимых значений неизвестного. Она определяется ограничениями

$$\sin 2x > 0;\ \sin 2x \neq 1;\ \sin x \neq 0;\ \cos x \neq 0;$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x > 0.$$

Из первого неравенства следует, что $\sin x$ и $\cos x$ должны иметь одинаковые знаки. Тогда остальные неравенства показывают, что число x должно определять угол, который лежит строго внутри первой или третьей четверти.

В области допустимых значений имеем

$$\log_{\sin 2x}\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right) = 1 - \log^2_{\sin 2x} 2,$$

$$\log_{\sin 2x}\frac{1}{\sin x \cos x} = 1 - \log^2_{\sin 2x} 2,$$

$$\log_{\sin 2x}\frac{2}{\sin 2x} = 1 - \log^2_{\sin 2x} 2,$$

$$\log^2_{\sin 2x} 2 + \log_{\sin 2x} 2 - 2 = 0.$$

Отсюда находим:

1) $\log_{\sin 2x} 2 = -2$;

2) $\log_{\sin 2x} 2 = 1$.

Второе уравнение не имеет решений. Первое уравнение приводит к равенству

$$\frac{1}{\sin^2 2x} = 2$$

или

$$\sin^2 2x = \frac{1}{2},$$

$$\sin 2x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Поскольку $\sin 2x > 0$, то надо взять только положительное значение синуса.

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}.$$

Ответ:

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}.$$

Задача 4. Четырехугольник $OMCD$ (рис. 19) получается отсечением треугольника OMB от треугольника BCD. Площадь треугольника BCD равна, очевидно, $^1/_2$. Площадь треугольника OMB может быть легко найдена.

Определим отношение BO к BD. Поскольку отрезки AM и BE являются медианами треугольника ABC, то

$$\frac{BO}{BE} = \frac{2}{3}, \quad BO = \frac{1}{3} BD.$$

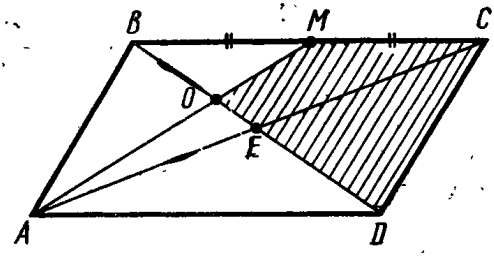


Рис. 19.

Таким образом, $\triangle OMB$ получается из $\triangle BCD$ уменьшением его сторон соответственно в 2 и 3 раза. Значит, его площадь составит $^1/_6$ часть площади треугольника BCD. Действительно,

$$S_{\triangle OMB} = \frac{BO \cdot BM}{2} \sin \angle OBM = \frac{\frac{1}{3} BD \cdot \frac{1}{2} BC}{2} \sin \angle OBM =$$

$$= \frac{1}{6} S_{\triangle BCD}.$$

Так как $S_{\triangle BCD}=1/2$, то

$$S_{\triangle OMB}=\frac{1}{12};\quad S_{OMCD}=\frac{1}{2}-\frac{1}{12}=\frac{5}{12}.$$

Ответ: $^5/_{12}$.

Задача 5. Сделаем подстановку

$$4^x=t>0.$$

Тогда у нас получится квадратное неравенство, содержащее числовой параметр a:

$$t^2-at+3-a\leqslant 0.$$

Для того чтобы исходное неравенство имело хотя бы одно решение, нужно, чтобы у полученного квадратичного трехчлена был хотя бы один положительный корень. В противном случае, т. е. в случае, когда у него нет действительных корней или оба корня отрицательны, мы не найдем действительных решений x. В случае отрицательных корней решения квадратного неравенства, лежащие между корнями квадратного трехчлена, будут отрицательными. Величина же t должна быть положительна. В случае отсутствия действительных корней у квадратного трехчлена мы вообще не найдем действительных значений t.

Действительность корней квадратного трехчлена обеспечивается неотрицательностью его дискриминанта

$$D=a^2-4(3-a)\geqslant 0,$$

$$a^2+4a-12\geqslant 0$$

или

$$a\geqslant 2 \text{ и } a\leqslant -6.$$

Для того чтобы узнать, когда хотя бы один из корней будет положителен, используем теорему Виета

$$\begin{cases} t_1+t_2=a, \\ t_1t_2=3-a. \end{cases}$$

При $a\leqslant -6$ имеем $t_1t_2=3-a>0$, произведение корней положительно, т. е. корни имеют одинаковые знаки, а поскольку сумма корней $t_1+t_2=a<0$, мы видим, что они оба отрицательны. Этот случай нам не подходит.

При $a\geqslant 2$ имеем: $t_1+t_2=a>0$, т. е. сумма корней положительна. Значит, хотя бы один из корней квадратичного трехчлена больше нуля. Итак, $a\geqslant 2$.

Ответ: $a\geqslant 2$.

§ 8. ФАКУЛЬТЕТ ПОЧВОВЕДЕНИЯ, 1974 г.

Вариант 1

1. Бригада из трех тракторов (два трактора марки А и один трактор марки Б) вспахивает поле 400 *га* за 10 суток при одновременной работе всех трех тракторов. Один трактор марки Б вспахивает все это поле на $8\frac{1}{3}$ суток быстрее, чем то же поле вспахивает один трактор марки А.

Сколько гектаров в сутки вспахивает трактор марки А и трактор марки Б каждый в отдельности?

2. Решить уравнение

$$\frac{1}{3}\log_2 x^3+\log_2\frac{x+4}{x+1}=2\log_4\left(\frac{x}{2}+3\right).$$

3. Найти все решения уравнения

$$\frac{\sqrt{3}+3\cos x+\sin 2x}{1+2\sin x}=-\sqrt{3}+\cos x.$$

4. Найти все значения a, при которых неравенство $\frac{x-a/4}{x-2a}<0$ выполняется для всех x таких, что $2\leqslant x\leqslant 4$.

5. В прямоугольном треугольнике ABC угол $C=90°$, а сторона $CA=4$. На катете CB взята точка D так, что $CD=1$. Окружность радиуса $\sqrt{5}/2$ проходит через точки C и D и касается в точке C окружности, описанной около треугольника ABC. Найти площадь треугольника ABC.

Вариант 2

1. Из пункта А в пункт В движется с постоянной скоростью автомобиль. Навстречу автомобилю из пункта В в пункт А движется с постоянной скоростью мотоцикл, который выехал из пункта В одновременно с отправлением автомобиля из пункта А. Скорость автомобиля на 20 *км/ч* больше скорости мотоцикла. Через 1 *ч* 30 *мин* автомобиль и мотоцикл встречаются. Найти расстояние между пунктами А и В, если это расстояние автомобиль проезжает на 1 *ч* 15 *мин* быстрее мотоцикла.

2. Решить уравнение

$$\left[(\log_2 x)^2+2\log_{\frac{1}{2}\sqrt{2}}\frac{1}{2\sqrt{2}}\right](3\log_2 x-1)=2\left(\log_2\frac{x}{2}\right)\log_2 x^2.$$

3. Найти все решения уравнения

$$\frac{2(\cos x+\sin x)+1-\cos 2x}{2(1+\sin x)}=\sqrt{3}+\sin x.$$

4. Найти все значения a, при которых неравенство $\frac{x-2a-1}{x-a}<0$ выполняется для всех x таких, что $1 \leqslant x \leqslant 2$.

5. На стороне AC остроугольного треугольника ABC взята точка D так, что $AD=1$, $DC=2$ и BD является высотой треугольника ABC. Окружность радиуса, равного 2, проходящая через точки A и D, касается в точке D окружности, описанной около треугольника BDC. Найти площадь треугольника ABC.

Вариант 3

1. Три трубы, работая одновременно, наполняют бассейн водой за 13 *ч* 20 *мин*. Если одновременно работают только первая и вторая трубы, то они вместе наполняют тот же бассейн на 6 *ч* дольше, чем его наполняет одна третья труба. За один час через вторую трубу протекает воды столько же, сколько через первую трубу. Через третью трубу за один час протекает воды на 3 $м^3$ большем, чем через первую трубу. Какова емкость бассейна?

2. Решить уравнение

$$(\log_3 x)^2 (1+2\log_3 x) = (\log_3 9x) \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3x}.$$

3. Найти все решения уравнения

$$\frac{1-\sin x+\sqrt{3}\sin 2x}{2\sqrt{3}\cos x-3} = \frac{1}{3}+\sin x.$$

4. Найти все значения a, при которых неравенство

$$(x-3a)(x-a-3)<0$$

выполняется для всех x таких, что $1 \leqslant x \leqslant 3$.

Вариант 4

1. Два экскаватора разных марок (один экскаватор марки А и один экскаватор марки Б), работая одновременно, выкапывают котлован емкостью 20 000 $м^3$ за 10 суток. Если бы работал только экскаватор марки Б, то он выкопал бы этот котлован на $8\frac{1}{3}$ суток скорее, чем тот же котлован выкопал один экскаватор марки А. Сколько кубических метров в сутки выкапывает каждый из экскаваторов?

2. Решить уравнение

$$\frac{1}{5}\log_3 x^5 + \log_3 \frac{x+2,5}{x+1} = 3\log_{27}(x+4) - 3\log_3 \sqrt[3]{2}.$$

3. Найти все решения уравнения

$$\frac{(\sqrt{3}+2)\sin x-\sin 2x}{1-\cos x}=3+2\sin x.$$

4. Найти все значения a, при которых неравенство

$$(x+3-2a)(x+3a-2)<0$$

выполняется для всех x таких, что $2\leqslant x\leqslant 3$.

5. Дан треугольник ABC, у которого стороны $AB=\sqrt{17}$, $BC=5$, $AC=4$. На стороне AC взята точка D так, что BD является высотой треугольника ABC. Найти радиус окружности, проходящей через точки A и D и касающейся в точке D окружности, описанной около треугольника BCD.

Разбор варианта 1

Задача 1. Обозначим производительность одного трактора марки А через u, а одного трактора марки Б — через v. Очевидно, что $u<40$ и $v<40$. Система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} 2u+v=40, \\ 48v-48u=uv. \end{cases}$$

Ее решение легко находится: $u=12$ *га/сутки*, $v=16$ *га/сутки*.

Ответ: 12 и 16.

Задача 2. Легко заметить, что допустимыми значениями x являются все числа, удовлетворяющие неравенству $x>0$. При этом условии данное уравнение равносильно следующему:

$$\log_2 x+\log_2\frac{x+4}{x+1}=\log_2\frac{x+6}{2}$$

или

$$\frac{x(x+4)}{x+1}=\frac{x+6}{2}.$$

Далее имеем

$$x^2+x-6=0,$$

$$x_1=-3;\ x_2=2.$$

Очевидно, что подходит только второе решение этого уравнения.

Ответ: $x=2$.

Задача 3. Исключив из рассмотрения те x, для которых $1+2\sin x=0$, т. е. $\sin x=-1/2$, можно записать

$$\sqrt{3}+3\cos x+\sin 2x=-\sqrt{3}+\cos x-2\sqrt{3}\sin x+\sin 2x$$

или

$$\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Последнее уравнение легко преобразуется к следующему виду:

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Отсюда находим

$$1.\ x-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}+2\pi k,$$

$$x=\frac{7\pi}{6}+2\pi k.$$

$$2.\ x-\frac{\pi}{3}=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k,$$

$$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k.$$

Первое множество решений нельзя считать решениями задачи, поскольку $\sin(7\pi/6)=-1/2$. Таким образом, только второе множество x дает решения.

Ответ: $x=-\pi/2+2\pi k$, где $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$.

Задача 4. В этой задаче требуется подобрать a так, чтобы все множество чисел от 2 до 4 принадлежало множеству решений данного неравенства. Найдем сначала решения этого неравенства. Рассмотрим два случая:

1. $a>0$. Тогда $2a>a/4>0$. Поэтому решения неравенства можно записать так:

$$\frac{a}{4}<x<2a.$$

2. $a\leqslant 0$. Тогда $2a<a/4\leqslant 0$. Решения неравенства имеют вид:

$$2a<x<\frac{a}{4}.$$

Очевидно, что второй случай можно не рассматривать, поскольку решения в этом случае вообще не содержат положительных x и, значит, чисел $2\leqslant x\leqslant 4$.

Для того чтобы все числа $2\leqslant x\leqslant 4$ входили в множество решений неравенства $a/4<x<2a$, необходимо выполнение двух неравенств $a/4<2$ и $2a>4$. Их совместное решение приводит к условию

$$2<a<8.$$

Ответ: $2<a<8$.

Задача 5. Поскольку окружность радиуса $\sqrt{5}/2$ проходит через вершину C и касается в этой точке окружности, описанной около прямоугольного треугольника ABC, то ее центр O' находится на радиусе OC, рис. 20.

Пусть точка E является точкой, в которой окружность радиуса $\sqrt{5}/2$ пересекает радиус описанной окружности. Соединим точку D с точкой E отрезком прямой. Очевидно, что получившийся треугольник CDE будет прямоугольным, поскольку вписанный угол

CDE опирается на диаметр окружности. Подсчитаем длину отрезка DE:

$$DE^2 = CE^2 - CD^2,$$

$$DE = \sqrt{5-1} = 2.$$

Теперь становится ясным, что длина DE составляет половину длины катета CA. Если бы мы опустили перпендикуляр из точки O на катет CB, то его длина также была бы равна 2, поскольку он являлся бы средней линией треугольника ABC, проведенной параллельно катету CA. А так как точки E и O лежат на одной прямой CO, то из равенства $DE=2$ следует, что точки E и O совпадают.

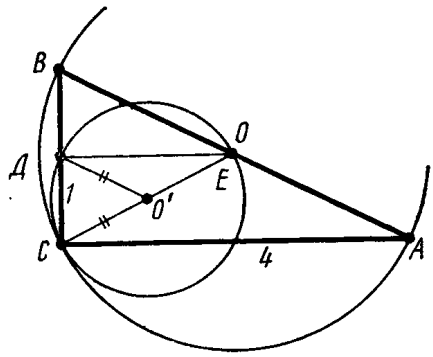


Рис. 20.

Из проведенного доказательства следует, что точка D является серединой катета CB и, значит, длина последнего равна 2. Отсюда легко следует, что площадь прямоугольного треугольника ABC равна 4.

Ответ: 4.

§ 9. БИОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, 1974 г.

Вариант 1

1. Пароход плывет от пристани А к пристани В и после десятиминутной стоянки в В возвращается в А, двигаясь в обоих направлениях с одной и той же постоянной скоростью. На пути из А в В в 8 часов пароход догоняет лодку, которая движется из А в В с постоянной скоростью 3 *км/ч*. В 8 часов 10 минут лодка находится на расстоянии 1,5 *км* от А. Пароход, направляясь из В в А после стоянки в В встречается в 8 часов 20 мин с лодкой и затем прибывает в А в то же время, когда лодка приходит в В. Определить время прибытия лодки в В.

2. Решить уравнение

$$2\left(\frac{1}{4}\right)^{\sin^2 x} + 2^{\cos 2x} = 2^{\sin 2x}.$$

3. В ромбе $ABCD$ со стороной a угол при вершине A равен $2\pi/3$. Точки E и F лежат на сторонах BC и AD соответственно, отрезок EF и диагональ ромба AC пересекаются в точке M. Площади четырехугольников $BEFA$ и $ECDF$ относятся как 1 : 2. Найти длину отрезка EM, если $AM : MC = 1 : 3$.

4. Решить неравенство

$$\frac{\log_{1/4}\sqrt{x+1}}{\log_{1/4}(x-1)} \leqslant 1.$$

5. Найти все значения x, для которых величина

$$y = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi(\sin x - \cos x)$$

удовлетворяет уравнению

$$2\log_3(6\operatorname{ctg} 2y + 5\operatorname{tg} y) = 2 + \log_{\frac{1}{3}}(6\operatorname{ctg} y - \operatorname{tg} y).$$

Вариант 2

1. Автобус отправляется из пункта А в пункт В и после шестиминутной стоянки в В возвращается в А, двигаясь в обоих направлениях с одной и той же постоянной скоростью. На пути из А в В автобус догоняет в 8 часов 50 минут велосипедиста, который движется из А в В с постоянной скоростью 15 *км/ч*. В 9 часов 02 минуты велосипедист находится на расстоянии 21 *км* от А. Автобус, возвращаясь из В в А после остановки в В, встречается в 9 часов 14 минут с велосипедистом и затем прибывает в А в то же время, когда велосипедист приезжает в В. Определить время отправления автобуса из А.

2. Решить уравнение

$$9^{\cos^2 x} + 3^{\cos 2x} = 12 \cdot 9^{\sin x \cdot \cos x}.$$

3. В ромбе $ABCD$ со стороной a угол при вершине A равен $\pi/3$. Точки E и F являются серединами сторон AB и CD соответственно. Точка K лежит на стороне BC, отрезки AK и EF пересекаются в точке M. Найти длину отрезка MK, если известно, что площадь четырехугольника $MKCF$ составляет $^3/_8$ площади ромба $ABCD$.

4. Решить неравенство

$$\frac{\log_{0,5}\sqrt{x+4}}{\log_{0,5}(x+2)} \leqslant 1.$$

5. Найти все значения x, для которых величина

$$y = \frac{4\pi}{3}\sin x \cdot \cos x$$

удовлетворяет уравнению

$$\log_4(\operatorname{ctg} 2y + \operatorname{tg} y) = 1 + \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}(9\operatorname{ctg} y - \operatorname{tg} y).$$

Вариант 3

1. Мотоциклист отправляется из пункта A в пункт B и после десятиминутной стоянки в B возвращается в A, двигаясь в обоих направлениях с одной и той же постоянной скоростью 48 *км/ч*. В момент отправления мотоциклиста из A навстречу ему из B в A выходит турист, идущий с постоянной скоростью. Турист встречается с мотоциклистом в 17 часов 15 минут. В 17 часов 25 минут турист находится на расстоянии 23 *км* от A. Направляясь из B в A после стоянки в B, мотоциклист догоняет туриста в 17 часов 35 минут. Определить время прибытия туриста в пункт C, находящийся на полпути между A и B (AC=CB).

2. Решить уравнение

$$9^{\cos^2 x} - 6\left(\frac{1}{9}\right)^{\sin^2 x} = 3^{1+\sin 2x}.$$

3. В правильном треугольнике ABC со стороной a точки D и E являются серединами сторон AB и BC соответственно. Точка F лежит на отрезке DB, точка K лежит на стороне AC. Отрезки FK и DE пересекаются в точке M. Найти длину отрезка FM, если известно, что $DM:ME=2:3$, а площадь четырехугольника $MECK$ составляет $^2/_5$ площади треугольника ABC.

4. Решить неравенство

$$\frac{\log_{0,2}\sqrt{x+10}}{\log_{0,2}(x-2)} < 1.$$

5. Найти все значения x, для которых величина

$$y = \frac{\sqrt{2\pi}}{3}(\cos x + \sin x)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2}\log_2(\operatorname{tg} 2y + \operatorname{ctg} y) = 1 + \log_{\frac{1}{4}}(9\operatorname{ctg} y - 5\operatorname{tg} y).$$

Вариант 4

1. Пристани A и B находятся на противоположных берегах озера. Пароход плывет из A в B и после десятиминутной стоянки в B возвращается в A, двигаясь в обоих направлениях с одной и той же постоянной скоростью 18 *км/ч*. В момент выхода парохода из A навстречу ему из B в A отправляется движущаяся с постоянной скоростью лодка, которая встречается с пароходом в 11 часов 10 минут. В 11 часов 25 минут лодка находится на расстоянии 3 *км* от A. Направляясь из B в A после стоянки, пароход догоняет лодку в 11 часов 40 минут. Определить время прибытия лодки в A.

2. Решить уравнение

$$5\cdot\left(\frac{1}{25}\right)^{\sin^2 x}+4\cdot 5^{\cos 2x}=25^{\frac{1}{2}\sin 2x}.$$

3. В правильном треугольнике ABC со стороной a точки E и D являются серединами сторон BC и AC соответственно. Точка F лежит на отрезке DC, отрезки BF и DE пересекаются в точке M. Найти длину отрезка MF, если известно, что площадь четырехугольника $ABMD$ составляет $^5/_8$ площади треугольника ABC.

4. Решить неравенство

$$\frac{\log_{1/3}\sqrt{x+3}}{\log_{1/3}(x+1)}<1.$$

5. Найти все значения x, для которых величина

$$y=\frac{\pi}{3}(\sin x+\sqrt{3}\cos x)$$

удовлетворяет уравнению

$$\log_4(\operatorname{tg}2y-3\operatorname{ctg}y)=1+\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}(\operatorname{ctg}y-\operatorname{tg}y).$$

Разбор варианта 1

Задача 1. На рис. 21 изображено расстояние AB с отмеченными точками: C — точка, в которой пароход догоняет лодку в 8 часов; $Д$ — точка, в которой находилась лодка в 8 часов 10 минут; E — точка, в которой пароход встретил лодку на обратном пути в A в 8 часов 20 минут. Все расстояние AB равно S *км*. Обозначим скорость парохода буквой u. Имеем

$$AД=1{,}5\ км;\ CД=3\cdot\frac{1}{6}=0{,}5\ км;$$

$$CB=S-AC=S-\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)=(S-1)\ км.$$

Таким образом, в 8 часов лодка была на расстоянии $(S-1)$ *км* от пристани B.

За 10 минут пароход прошел расстояние

$$CB+BE=S-1+S-2=2S-3$$
$$\left(BE=S-1-3\cdot\frac{1}{3}=S-2\right).$$

Поэтому его скорость можно представить так:

$$u=\frac{2S-3}{1/6}=6(2S-3)\ км/ч.$$

Кроме того, $BE=S-2$; $AE=2$.

Так как пароход и лодка шли одно и то же время, то

$$\frac{S-2}{3}=\frac{2}{6(2S-3)};$$

откуда находим, что $S=5/2$ *км*, $S-2=5/2-2=0{,}5$ *км*.

От точки E лодка шла

$$\frac{1/2}{3}=\frac{1}{6}$$ часа, т. е. 10 минут.

Ответ: лодка пришла к пристани B в 8 часов 30 минут.

Задача 2. Преобразуем это уравнение следующим образом:

$$2\cdot 2^{-2\sin^2 x}+2^{1-2\sin^2 x}=2^{2\sin x\cdot\cos x},$$

$$2^{2-2\sin^2 x}=2^{2\sin x\cos x},$$

$$2-2\sin^2 x=2\sin x\cos x,$$

$$\cos^2 x=\sin x\cos x.$$

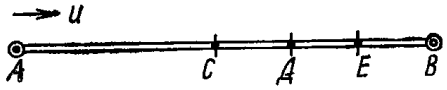


Рис. 21.

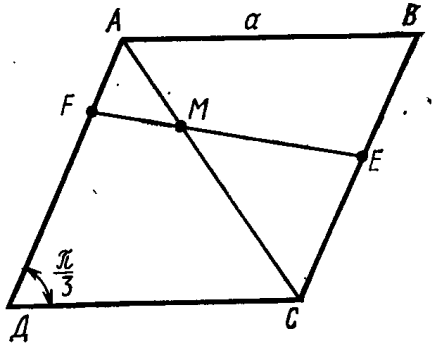


Рис. 22.

Возможны два случая:

1. $\cos x=0$; $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$.

2. $\cos x=\sin x$, $\operatorname{tg} x=1$; $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$.

Ответ: $x=\pi/2+\pi k$; $x=\pi/4+\pi k$; $k=0, \pm 1, \pm 2 \ldots$.

Задача 3. Четырехугольники $ABEF$ и $ECDF$ представляют собой трапеции с общей высотой, рис. 22. Поэтому отношение их площадей можно записать следующим образом:

$$\frac{BE+AF}{EC+FD}=\frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Обозначим EC через x. Тогда $BE=a-x$, $AF=x/3$, $DF=a-x/3$. Подставляя эти выражения в соотношение (1), определим x:

$$\frac{a-x+x/3}{x+a-x/3}=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{a}{2}.$$

По условию задачи $AM:MC=1:3$, т. е.

$$\frac{AC-MC}{MC}=\frac{1}{3},$$

где $AC=a$. Тогда

$$3a-3\cdot MC=MC,$$

$$4\cdot MC=3a,\ MC=\frac{3a}{4}.$$

Из треугольника MEC по теореме косинусов находим длину отрезка EM:

$$EM^2=MC^2+EC^2-2\cdot MC\cdot EC\cdot\cos\frac{\pi}{3},$$

$$EM^2=\frac{9a^2}{16}+\frac{a^2}{4}-2\cdot\frac{3}{4}a\cdot\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{2}=\frac{7a^2}{16},$$

$$EM=\frac{a\sqrt{7}}{4}.$$

Ответ: $a\sqrt{7}/4$.

Задача 4. Область допустимых значений этого неравенства определяется условиями $x>1$ и $x\neq 2$.

Знак выражения, стоящего в знаменателе дроби, положителен, если $0<x-1<1$, и отрицателен, если $x-1>1$. Рассмотрим оба случая.

1. $1<x<2$. Тогда $\log_{\frac{1}{4}}(x-1)>0$. Имеем:

$$\log_{\frac{1}{4}}\sqrt{x+1}\leqslant\log_{\frac{1}{4}}(x-1).$$

Так как основание логарифмов меньше единицы, то

$$\sqrt{x+1}\geqslant x-1.$$

Поскольку обе части этого неравенства положительны, то оно равносильно неравенству

$$x+1\geqslant(x-1)^2$$

или

$$x^2-3x\leqslant 0,$$

решениями которого будут числа $0\leqslant x\leqslant 3$. Учитывая, что рассматриваются числа $1<x<2$, заключаем, что множество $1<x<2$ есть решение исходного неравенства.

2. $x>2$. Тогда $\log_{\frac{1}{4}}(x-1)<0$. Имеем

$$\log_{\frac{1}{4}}\sqrt{x+1}\geqslant\log_{\frac{1}{4}}(x-1)$$

или

$$\sqrt{x+1}\leqslant x-1.$$

Так как обе части этого неравенства положительны, то оно равносильно неравенству

$$x+1\leqslant(x-1)^2$$

или

$$x^2-3x\geqslant 0,$$

решениями которого будут числа $x\geqslant 3$ и $x\leqslant 0$. Учитывая, что в рассматриваемом случае $x>2$, получим $x\geqslant 3$.

Ответ: 1). $x\geqslant 3$ 2). $1<x<2$.

Задача 5. Сначала найдем все решения второго уравнения. Для этого, отметив, что $\sin y\neq 0$ и $\cos y\neq 0$, запишем его в следующем, более простом виде:

$$\log_3\left(6\frac{1-\operatorname{tg}^2 y}{2\operatorname{tg} y}+5\operatorname{tg} y\right)=2-\log_3\left(\frac{6}{\operatorname{tg} y}-\operatorname{tg} y\right),$$

или

$$\log_3\frac{3+2\operatorname{tg}^2 y}{\operatorname{tg} y}=\log_3\frac{9\operatorname{tg} y}{6-\operatorname{tg}^2 y}.$$

Это уравнение равносильно системе

$$\frac{(3+2\operatorname{tg}^2 y)}{\operatorname{tg} y}=\frac{9\operatorname{tg} y}{6-\operatorname{tg}^2 y}>0,$$

или

$$\begin{cases}(3+2\operatorname{tg}^2 y)(6-\operatorname{tg}^2 y)=9\operatorname{tg}^2 y,\\ \operatorname{tg} y>0.\end{cases}$$

Отсюда находим

$$\operatorname{tg} y=\sqrt{3},$$

или

$$y=\frac{\pi}{3}+\pi k,\ \text{где}\ k=0,\pm 1,\pm 2\ldots.$$

Найдем теперь все значения x, для которых равенство

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{3}(\sin x-\cos x)=\frac{\pi}{3}+\pi k$$

выполняется хотя бы при одном целом k. Имеем

$$\sqrt{2}(\sin x-\cos x)=1+3k,$$

$$2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1+3k,$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+3k}{2}.$$

Поскольку, однако, $|\sin(x-\pi/4)| \leqslant 1$, то из всех целых k следует оставить только два: $k_1=0$ и $k_2=-1$. Рассмотрим оба случая.

1. $k=0$; $\sin(x-\pi/4)=1/2$.

а) $x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $x=\frac{5\pi}{12}+2\pi n$;

б) $x-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $x=\frac{13\pi}{12}+2\pi n$.

В этих формулах $n=0, \pm 1, \pm 2 \ldots$.

2. $k=-1$; $\sin(x-\pi/4)=-1$.

$$x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad x=-\frac{\pi}{4}+2\pi n.$$

Таким образом, все искомые значения x найдены.

Ответ: $x=5\pi/12+2\pi n$; $x=13\pi/12+2\pi n$; $x=-\pi/4+2\pi n$, $n=0, \pm 1, \pm 2 \ldots$.

§ 10. ФАКУЛЬТЕТ ПОЧВОВЕДЕНИЯ, 1975 г.

Вариант 1

1. Два экскаватора должны вырыть три одинаковых котлована. Если они будут работать вместе, то выроют их за два дня. Первый экскаватор может вырыть один такой котлован на день быстрее второго. В один из дней первый экскаватор работал полдня, а второй работал весь день. Какая часть всей работы была выполнена за этот день?

2. Найти все значения переменной величины x, при которых выражение

$$3+\sin^2 2x-2\sin^2 x$$

достигает своего максимального значения.

3. Решить уравнение

$$x+27^{\frac{5}{2}\left|\log_{9\sqrt{3}}\sqrt[3]{x}\right|}=\frac{10}{3}.$$

4. В параллелограмме лежат две окружности, касающиеся друг друга и трех сторон параллелограмма каждая. Радиус одной из окружностей равен 1. Известно также, что один из отрезков стороны параллелограмма от вершины до точки касания равен $\sqrt{3}$. Найти площадь параллелограмма.

5. Доказать без помощи таблиц, что

$$\log_2 7+\left(3+\cos\frac{15}{7}\right)\cdot\log_7 2<4.$$

Вариант 2

1. Теплоход от А до В по течению реки идет 3 дня. Путешественник из А и В спустился на плоту, а обратно добирался на теплоходе. Плоты движутся со скоростью течения реки, причем известно, что эта скорость строго меньше половины скорости теплохода в стоячей воде. Вся дорога заняла у путешественника 18 дней. Сколько времени занял бы тот же путь, если бы скорость течения была в полтора раза больше?

2. Найти все значения переменной величины x, при которых выражение

$$2\sin^4 x+\cos 2x+2$$

достигает своего минимального значения.

3. Решить уравнение

$$9\left|\log_{2\sqrt{2}}\sqrt[3]{x-1}\right|=4\log_4\left(\frac{7}{2}-x\right).$$

4. В равнобочной трапеции лежат две окружности. Одна из них, радиуса 1, вписана в трапецию, а вторая касается двух сторон трапеции и первой окружности. Расстояние от вершины угла, образованного двумя сторонами трапеции, касающимися второй окружности, до точки касания окружностей вдвое больше диаметра второй окружности. Найти площадь трапеции.

5. Доказать без помощи таблиц, что

$$\operatorname{tg}50^\circ+2\operatorname{ctg}50^\circ+\frac{\cos 3{,}4}{\operatorname{tg}50^\circ}<4.$$

Вариант 3

1. Два насоса разной производительности, работая одновременно могут наполнить резервуар за 2 дня. Вначале два таких одинаковых резервуара были заполнены наполовину. Первым насосом перекачали содержимое одного из них в другой, после чего с помощью второго насоса заполнили освободившийся резервуар. Вся работа заняла 6 дней. Сколько времени потребует та же работа, если насосы поменять местами, т. е. сначала использовать второй насос, а потом первый?

2. Найти все значения переменной величины x, при которых выражение

$$2\sin^2 2x-4\cos^2 x-1$$

достигает своего максимального значения.

3. Решить уравнение

$$4^{\frac{1}{4}\left|\log_{4\sqrt{2}}(x+1)^3\right|}=\frac{5}{4}-\frac{3}{4}x.$$

4. В параллелограмме лежат две окружности. Одна из них, радиуса 3, вписана в параллелограмм, а вторая касается двух сторон параллелограмма и первой окружности. Расстояние между точками касания, лежащими на одной стороне параллелограмма, равно 3. Найти площадь параллелограмма.

5. Доказать без помощи таблиц, что

$$\log_3 31 + (14 + \sin 91^\circ)\log_{31} 2 < 8.$$

Вариант 4

1. Если идти шагом вверх по поднимающемуся эскалатору, то можно подняться на 10 *с* раньше, чем стоя на нем. Если же не идти, а бежать вверх, то можно выиграть еще 5 *с*. Пассажир, стоя на эскалаторе, поднялся на половину высоты эскалатора, после чего последний остановился. Вторую половину подъема пассажир прошел шагом. Сколько времени занял у него весь подъем, если известно, что человек бегает в два раза быстрее, чем ходит?

2. Найти все значения переменной величины x, при которых выражение

$$4\cos^4 x - 3\cos 2x + 1$$

достигает своего минимального значения.

3. Решить уравнение

$$\log_{3\sqrt{3}}\left(\frac{7}{2} - \frac{3}{4}x\right) = 5\left|\log_{9\sqrt{3}}\sqrt[3]{x-2}\right|.$$

4. В прямоугольной трапеции лежат две окружности. Одна из них, радиуса 4, вписана в трапецию, а другая, радиуса 1, касается двух сторон трапеции и первой окружности. Найти площадь трапеции.

5. Доказать без помощи таблиц, что

$$4\sin^2 63^\circ + (15 - \cos 89^\circ)\frac{\operatorname{cosec}^2 63^\circ}{4} < 8.$$

Разбор варианта 1

Задача 1. Обозначим производительности экскаваторов u и v соответственно, а всю работу примем за единицу. Система уравнений задачи очевидна:

$$\begin{cases} 2(u+v) = 1, \\ \frac{1}{3v} - \frac{1}{3u} = 1. \end{cases}$$

Исключая u из второго уравнения с помощью первого, находим:

$$6v^2 - 7v + 1 = 0,$$

откуда $v_1=1$, $v_2=1/6$. Следует учесть, что по условию задачи $u<1$ и $v<1$. Поэтому остается значение v, равное 1/6. Тогда $u=1/3$.

Требуется определить часть работы, выполненную экскаваторами за тот день, когда первый работал полдня, а второй — полный день, т. е. найти величину $(0{,}5u+v)$. Она равна:

$$0{,}5\cdot u+v=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}.$$

Ответ: 1/3.

Задача 2. Заметим, что формулы

$$\sin^2 2x=1-\cos^2 2x \text{ и } \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$$

позволяют записать рассматриваемое выражение только через $\cos 2x$.

$$A=3+(1-\cos^2 2x)-(1-\cos 2x)=-\cos^2 2x+\cos 2x+3.$$

Здесь A — рассматриваемое выражение. После очевидных преобразований («выделение полного квадрата») имеем

$$A=-\left[\cos^2 2x-2\cdot\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\right]+3\frac{1}{4}=$$
$$=\frac{13}{4}-\left(\cos 2x-\frac{1}{2}\right)^2.$$

Таким образом, рассматриваемое выражение равно числу 13/4 минус некоторое неотрицательное выражение. Если $\cos 2x\neq 0{,}5$, то $A<13/4$ и только при $\cos 2x=0{,}5$ значение A равно 13/4. Итак, A достигает максимального значения при $\cos 2x=0{,}5$:

$$2x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,$$

$$x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k.$$

Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, где $k=0,\pm 1,\pm 2\ldots$.

Задача 3. Заметим, что $x>0$. Имеем:

$$27^{\frac{5}{2}\left|\log_9\sqrt{3}\sqrt[3]{x}\right|}=3^{\frac{15}{2}\left|\frac{1}{3}\log_{3^5/_2}x\right|},$$

$$3^{\frac{15}{2}\left|\frac{1}{3}\log_{3^5/_2}x\right|}=3^{\frac{15}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}|\log_3 x|},$$

$$3^{|\log_3 x|}=\begin{cases}x, & \text{если } \log_3 x\geqslant 0, \text{ т. е. } x\geqslant 1;\\ \dfrac{1}{x}, & \text{если } \log_3 x<0, \text{ т. е. } 0<x<1.\end{cases}$$

Рассмотрим первый случай: $x \geqslant 1$.

$$x + x = \frac{10}{3}, \quad x = \frac{5}{3}.$$

Поскольку $5/3 > 1$, заключаем, что $x = 5/3$ есть решение.

Во втором случае $0 < x < 1$. Имеем

$$x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3},$$

$$3x^2 - 10x + 3 = 0,$$

$$x_1 = 3, \quad x_2 = \frac{1}{3}.$$

Неравенству $0 < x < 1$ удовлетворяет только второе решение. Таким образом, задача имеет два решения: $x = 5/3$ и $x = 1/3$.

Ответ: $x = 5/3$, $x = 1/3$.

Задача 4. Нетрудно заметить, что обе окружности должны касаться одних и тех же параллельных сторон параллелограмма $ABCD$, рис. 23, например, сторон AD и BC. Поэтому радиусы этих окружностей должны быть равны между собой. Очевидно, что $\sqrt{3}$ равняется больший из отрезков стороны параллелограмма от вершины до точки касания, на чертеже AE. Поэтому для данного чертежа угол параллелограмма A будет острым.

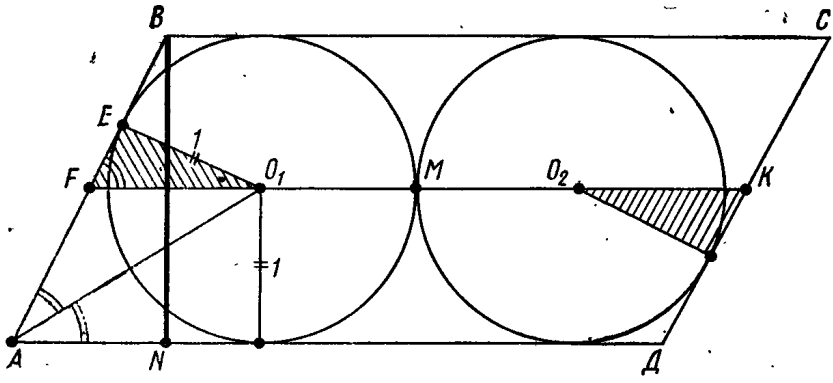


Рис. 23.

Из прямоугольного треугольника AEO_1 (O_1 — центр первой окружности) вычисляется AO_1:

$$AO_1 = \sqrt{AE^2 + EO^2_1} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2.$$

Таким образом, угол $EAO_1 = 30°$, а угол A равен 60° (AO_1 — биссектриса угла A).

Рассмотрим прямоугольный треугольник FEO_1, в котором угол EFO_1 равен 60°, а катет EO_1 равен 1. Из него легко определяется

отрезок FO_1:

$$FO_1 = \frac{EO_1}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}/2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Зная длину отрезка FO_1, можно определить весь отрезок FK:

$$FK = FO_1 + O_1O_2 + KO_2 = 2(FO_1 + O_1M) = 2\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + 1\right).$$

Очевидно, что $FO_1 = KO_2$ (O_2 — центр второй окружности).

Площадь параллелограмма находится по формуле

$$S_{ABCD} = AD \cdot BN,$$

в которой BN — высота параллелограмма. Так как $AD = FK$, а $BN = 2$, то

$$S_{ABCD} = 2\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + 1\right) \cdot 2 = \frac{4(2\sqrt{3}+3)}{3}.$$

Ответ: $4(2\sqrt{3}+3)/3$.

Задача 5. Обозначим $\log_2 7$ буквой t и заметим, что

$$2 < t < 3.$$

Данное в задаче неравенство можно записать следующим образом:

$$t + \left(3 + \cos\frac{15}{7}\right) \cdot \frac{1}{t} < 4.$$

Учитывая, что t положительно, получаем:

$$t^2 - 4t + \left(3 + \cos\frac{15}{7}\right) < 0.$$

Таким образом, необходимо показать, что значение $t = \log_2 7$ удовлетворяет этому квадратному неравенству.

Поскольку дискриминант квадратного трехчлена в левой части последнего неравенства неотрицателен

$$D = 2^2 - \left(3 + \cos\frac{15}{7}\right) = 1 - \cos\frac{15}{7} \geqslant 0,$$

то решения неравенства заключены в области

$$2 - \sqrt{1 - \cos\frac{15}{7}} < t < 2 + \sqrt{1 - \cos\frac{15}{7}}. \qquad (*)$$

Покажем, что $t = \log_2 7$ лежит в этой области.

Очевидно, что

$$2 - \sqrt{1 - \cos\frac{15}{7}} < 2.$$

Докажем, что

$$2+\sqrt{1-\cos\frac{15}{7}}>3.$$

Заметим, что число 15/7 заключено в интервале

$$\frac{\pi}{2}<\frac{15}{7}<\pi,$$

а косинус для этих значений отрицателен. Поэтому

$$\cos\frac{15}{7}<0$$

и

$$2+\sqrt{1-\cos\frac{15}{7}}>3.$$

Поскольку значение $t=\log_2 7$ удовлетворяет неравенству $2<t<3$, то оно лежит в области (*), и утверждение доказано.

§ 11. БИОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, 1975 г.

Вариант 1

1. Два насоса, работая одновременно, наполнили водой бассейн емкостью 80 $м^3$. Если увеличить производительность первого насоса в 4/3 раза, то он один сможет наполнить бассейн, работая на два часа дольше, чем работали оба насоса вместе. Если уменьшить производительность второго насоса на 1 $м^3/ч$, то он один сможет наполнить бассейн, если будет работать в 10/3 раза дольше, чем работали оба насоса вместе. Сколько кубометров воды в час перекачивает второй насос?

2. Найти все значения действительного параметра p, при которых квадратное уравнение

$$(3x)^2+(3^{\frac{1}{p}+3}-15)x+4=0$$

имеет ровно одно решение.

3. Отрезок AB есть диаметр круга, а точка C лежит вне этого круга. Отрезки AC и BC пересекаются с окружностью в точках D и M соответственно. Найти угол CBD, если площади треугольников DCM и ACB относятся как 1 : 4.

4. Решить уравнение

$$\sin x-2\sin 2x+\sin 3x=|1-2\cos x+\cos 2x|.$$

Найти все целые n, удовлетворяющие неравенству

$$\log_{\left(2\cos\frac{2\pi}{7}-n+8\right)}\left(\frac{\sqrt{n+5}-1}{\sqrt{10-n}}\right)\geqslant 0.$$

Вариант 2

1. Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 100 *км*, выехал мотоциклист, и одновременно с ним из В в А выехал велосипедист. Через некоторое время они встретились в пункте С и, продолжив свой путь, прибыли в пункты назначения. На следующий день мотоциклист вернулся в А, а велосипедист — в В. При этом мотоциклист двигался в 3/2 раза быстрее, чем накануне, и поэтому на весь путь из В в А затратил на 10 *мин* меньше, чем на путь от А до С в первый день. Скорость велосипедиста во второй день была на 10 *км/ч* выше, чем в первый день, и на весь путь из А в В он затратил в 5/2 раза больше времени, чем на путь от В до С в первый день. С какой скоростью двигался мотоциклист в первый день на пути из А в В?

2. Найти все действительные значения параметра p, при которых квадратное уравнение

$$(4x)^2+(4^{\frac{1}{p}+2}-40)x+9=0$$

имеет ровно одно решение.

3. В круге проведены две хорды AB и CD, пересекающиеся в точке M. K — точка пересечения биссектрисы угла BMD с хордой BD. Найти отрезки BK и KD, если $BD=3$, а площади треугольников CMB и AMD относятся как 1 : 4.

4. Решить уравнение

$$|\cos x+2\sin 2x-\cos 3x|=1+2\sin x-\cos 2x.$$

5. Найти все целые числа n, удовлетворяющие неравенству

$$\log_{\left(4\sin\frac{\pi}{5}-n+10\right)}\left(\frac{\sqrt{15-n}}{1+\sqrt{n+12}}\right)\leqslant 0.$$

Вариант 3

1. Две автоколонны, состоящие из одинакового числа машин, перевозят груз. В каждой из автоколонн машины имеют одинаковую грузоподъемность и во время рейса загружаются полностью. Грузоподъемность автомашин в разных колоннах различна, и за один рейс первая автоколонна перевозит на 40 *т* груза больше, чем вторая автоколонна. Если уменьшить число машин в первой автоколонне на 2, а во второй автоколонне — на 10, то первая автоколонна перевезет 90 *т* груза за один рейс, а вторая автоколонна перевезет 90 *т* груза за 3 рейса. Какова грузоподъемность одной машины второй автоколонны?

2. Найти все значения действительного параметра p, при которых квадратное уравнение

$$(8x)^2+(2^{\frac{1}{p}+7}-80)x+9=0$$

имеет ровно одно решение.

3. В треугольнике ABC проведены биссектриса BD угла ABC и отрезок AM. Точки D и M лежат соответственно на AC и BC, K — точка пересечения BD и AM. Площади треугольников AKD и AMC относятся как 1 : 6. Найти сторону AB, если $AB+BC=3$ и $AB+BM=2$.

4. Решить уравнение

$$\cos x-2\sin 2x-\cos 3x=|1-2\sin x-\cos 2x|.$$

5. Найти все целые числа n, удовлетворяющие неравенству

$$\log_{\left(2\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{7}-n+7\right)}\left(\frac{\sqrt{n+6}-1}{\sqrt{9-n}}\right)\geqslant 0.$$

Вариант 4

1. Двое рабочих в первый день работали одно и то же время, обрабатывая одинаковые детали. При этом первый рабочий обработал на 30 деталей больше, чем второй. На следующий день первый рабочий увеличил производительность труда в 1,2 раза и закончил работу на один час раньше, чем в первый день. Второй рабочий во второй день обрабатывал на 5 деталей в час меньше и проработал в 7/6 раза дольше, чем в первый день. Известно, что во второй день каждый из рабочих обработал по 420 деталей. Сколько деталей в час обрабатывал второй рабочий в первый день?

2. Найти все значения действительного параметра p, при которых квадратное уравнение

$$(4x)^2+(2^{\frac{1}{p}+4}-24)x+1=0$$

имеет ровно одно решение.

3. В окружность вписан выпуклый четырехугольник $ABCD$, причем AB является диаметром окружности. Диагонали AC и BD пересекаются в точке M. Известно, что $BC=3$, $CM=3/4$, а площадь треугольника ABC втрое больше площади треугольника ACD. Найти длину отрезка AM.

4. Решить уравнение

$$|\sin x+2\sin 2x+\sin 3x|=1+2\cos x+\cos 2x.$$

5. Найти все целые числа n, удовлетворяющие неравенству

$$\log_{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}-n+13}\left(\frac{\sqrt{16-n}}{\sqrt{n+11}+1}\right)\leqslant 0.$$

Разбор варианта 1

Задача 1. Обозначим производительности первого и второго насосов через v_1 и v_2 соответственно. Тогда условие задачи позволяет составить следующую систему уравнений:

$$\frac{80}{\frac{4}{3}v_1}=\frac{80}{v_1+v_2}+2,$$

$$\frac{80}{v_2-1}=\frac{10}{3}\cdot\frac{80}{v_1+v_2}.$$

Второе уравнение этой системы позволяет установить линейную связь между величинами v_1 и v_2:

$$7v_2-3v_1=10.$$

Исключая v_1 из первого уравнения, получаем уравнение для определения v_2:

$$\frac{90}{7v_2-10}=\frac{12}{v_2-1}+1$$

или

$$7v_2^2-23v_2-20=0.$$

Положительный корень этого уравнения равен 4.

Ответ: второй насос перекачивает 4 $м^3/ч$.

Задача 2. Квадратное уравнение имеет единственное решение только в том случае, если его дискриминант равен нулю. Поэтому параметр p должен удовлетворять уравнению:

$$D=(3^{\frac{1}{p}+3}-15)^2-144=0$$

или

$$(3^{\frac{1}{p}+3}-15)^2=144,$$

$$|3^{\frac{1}{p}+3}-15|=12.$$

Возможны два варианта:

$$1)\ 3^{\frac{1}{p}+3}-15=12;\quad 2)\ 3^{\frac{1}{p}+3}-15=-12.$$

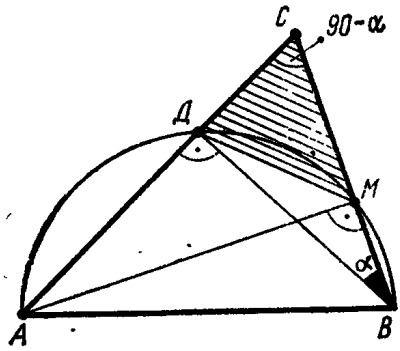


Рис. 24.

Первый из этих случаев невозможен, так как

$$3^{\frac{1}{p}+3}=27,$$

$$\frac{1}{p}+3=3, \text{ но } \frac{1}{p}\neq 0.$$

Во втором случае имеем

$$3^{\frac{1}{p}+3}=3,$$

$$\frac{1}{p}+3=1,\ p=-\frac{1}{2}.$$

Ответ: $p=-1/2$.

Задача 3. Соединим между собой точки B и D, рис. 24, а также точки A и M. Получившиеся треугольники ABD и ABM — прямоугольные, поскольку соответствующие углы ADB и AMB опираются на диаметр окружности. Обозначим угол CBD через α; тогда угол ACB равен $(90°-\alpha)$, так как треугольник CBD — прямоугольный.

Составим отношение площадей треугольников DCM и ACB, равное по условию 1/4.

$$\frac{S_{DCM}}{S_{ACC}}=\frac{\frac{1}{2}DC\cdot MC\cdot\sin(90°-\alpha)}{\frac{1}{2}AC\cdot BC\cdot\sin(90°-\alpha)}=\frac{DC\cdot MC}{AC\cdot BC}=\frac{1}{4}.$$

Заметим, что

$$\frac{DC}{BC}=\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha;\quad \frac{MC}{AC}=\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha.$$

Тогда

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{4} \text{ или } \sin\alpha=\frac{1}{2}.$$

Поскольку α — острый угол, то $\alpha=30°$.

Ответ: $\alpha=30°$.

Задача 4. Используем формулы:

а) $\cos 2x=2\cos^2 x-1$;

б) $\sin x+\sin 3x=2\sin 2x\cos x$.

Тогда запись уравнения можно упростить

$$2\sin 2x\cos x-2\sin 2x=|2\cos^2 x-2\cos x|,$$

$$\sin 2x(\cos x-1)=|\cos x(\cos x-1)|,$$

$$2\sin x\cos x(\cos x-1)=|\cos x(\cos x-1)|.$$

Данное уравнение распадается на две системы

$$\text{I.}\begin{cases}\cos x(\cos x-1)\geqslant 0,\\ 2\sin x\cos x(\cos x-1)=\cos x(\cos x-1).\end{cases}$$

Уравнение в этой системе имеет следующие решения:

а) $\cos x=0$; $x=\frac{\pi}{2}+\pi m$;

б) $\cos x=1$; $x=2\pi m$;

в) $\sin x=\frac{1}{2}$; $x=\frac{\pi}{6}+2\pi m$, $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi m$.

Из найденных решений неравенству удовлетворяют следующие:

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi m,\quad x=2\pi m,\quad x=\frac{5\pi}{6}+2\pi m\quad (m=0,\pm 1,\pm 2\ldots).$$

$$\text{II.}\begin{cases}\cos x(\cos x-1)<0,\\ 2\sin x\cos x(\cos x-1)=-\cos x(\cos x-1).\end{cases}$$

Уравнение с учетом неравенства имеет следующие решения:

$$x=-\frac{\pi}{6}+2\pi m\quad (m=0,\pm 1,\pm 2\ldots).$$

Ответ: 1. $x=2\pi m$; 2. $x=\frac{\pi}{2}+\pi m$;

3. $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi m$; 4. $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi m$, где $m=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$.

Задача 5. Анализ выражения, стоящего под знаком логарифма, показывает, что значения n нужно искать лишь в интервале

$$-3\leqslant n\leqslant 9.$$

Тогда возможны два случая.

1. Основание логарифма больше единицы:

$$2\cos\frac{2\pi}{7}-n+8>1$$

или

$$n<7+2\cos\frac{2\pi}{7}.$$

Очевидно, что $2\cos\frac{2\pi}{7}<2$. Покажем, что $2\cos\frac{2\pi}{7}>1$.

Для этой цели сравним число $2\pi/7$ с числом $\pi/3$, косинус которого известен и равен 1/2:

$$\frac{2\pi}{7}<\frac{\pi}{3}.$$

Известно, что в области от 0 до $\pi/2$ косинус является монотонно убывающей функцией. Поэтому косинус большего угла меньше,

чем косинус меньшего угла.

$$\cos\frac{2\pi}{7}>\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},$$

$$2\cos\frac{2\pi}{7}>1.$$

Таким образом, в первом случае рассматриваются все целые числа n, удовлетворяющие неравенствам

$$-3\leqslant n\leqslant 8.$$

Имеем

$$\frac{\sqrt{n+5}-1}{\sqrt{10-n}}\geqslant 1,$$

$$\sqrt{n+5}-1\geqslant\sqrt{10-n}.$$

Поскольку при рассматриваемых n разность $\sqrt{n+5}-1$ положительна, то можно возвести обе части неравенства в квадрат

$$n+5-2\sqrt{n+5}+1\geqslant 10-n,$$

$$n-2\geqslant\sqrt{n+5}.$$

Отсюда видно, что $n-2\geqslant 0$, $n\geqslant 2$. Далее:

$$n^2-5n-1\geqslant 0.$$

Этому неравенству (с учетом $2\leqslant n\leqslant 8$) удовлетворяют три целых значения n:

$$n=6,\ 7,\ 8.$$

$2.0<2\cos\frac{2\pi}{7}-n+8<1$. Здесь нужно рассмотреть единственное значение n : $n=9$. Непосредственной подстановкой этого числа в неравенство убеждаемся, что

$$\log_{2\cos\frac{2\pi}{7}-1}(\sqrt{14}-1)<0$$

и, значит, оно не является решением.

Ответ: $n=6,\ 7,\ 8$.

§ 12. ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, ОТДЕЛЕНИЕ ОБЩЕЙ ГЕОЛОГИИ, 1972 г.

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$2\cos^2 x+3\sin x=0.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\log_2 x+\log_2 y^2=0,\\ \log_2 x^2-\log_{\frac{1}{3}} y=5.\end{cases}$$

3. Из пунктов А и В, расположенных на расстоянии 100 *км*, навстречу друг другу одновременно выехали 2 велосипедиста. Через четыре часа они встретились. После встречи скорость первого велосипедиста, едущего из А в В, возросла на 5 *км/ч*, а скорость второго велосипедиста, едущего из В в А, возросла на 10 *км/ч*. Известно, что первый велосипедист прибыл в пункт В на один час раньше, чем второй прибыл в пункт А. Определить первоначальную скорость первого велосипедиста.

4. Найти все значения x, при которых справедливо неравенство

$$\frac{4}{1-x} > x+2.$$

5. Дан треугольник ABC, в котором угол B равен 30°, $AB=4$ *см*, $BC=6$ *см*. Биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке D. Определить площадь треугольника ABD.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$2\sin^2 x+5\cos x+1=0.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2 x+\log_2 y=4, \\ \log_4(x+y)=\frac{3}{2}. \end{cases}$$

3. Два экскаватора, работая совместно, вырывают котлован за 12 *ч*. Производительность первого экскаватора равна 8 $м^3/ч$. Если производительность второго экскаватора увеличить на 4 $м^3/ч$, то второй экскаватор будет вырывать котлован на 15 *ч* быстрее, чем первый. Определить производительность второго экскаватора.

4. Найти все значения x, при которых справедливо неравенство

$$\frac{6}{x+3} < 1-x.$$

5. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом B биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке D. Известно, что $BD=4$ *см*, $DC=6$ *см*. Определить площадь треугольника ADC.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$2\cos^2 x-5\sin x-4=0.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2\log_4 x+\log_{\frac{1}{5}} y^2=-1, \\ \log_4 x^4-\log_{\frac{1}{5}} y=5. \end{cases}$$

3. Из пунктов A и B, расположенных на расстоянии 50 *км*, навстречу друг другу одновременно вышли 2 пешехода. Через 5 *ч* они встретились. После встречи скорость первого пешехода, идущего из A в B, уменьшилась на 1 *км/ч*, а скорость второго пешехода, идущего из B в A, возросла на 1 *км/ч*. Известно, что первый пешеход прибыл в пункт B на 2 *ч* раньше, чем второй прибыл в пункт A. Определить первоначальную скорость первого пешехода.

4. Найти все значения x, при которых справедливо неравенство

$$\frac{13}{2-x} > x+4.$$

5. Дан треугольник ABC, в котором $AB=6$ *см*, $BC=7$ *см*, $AC=5$ *см*. Биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке D. Определить площадь треугольника ADC.

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$2\sin^2 x - 7\cos x - 5 = 0.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 3, \\ \log_8 (x+y) = \frac{4}{3}. \end{cases}$$

3. Два насоса, работая совместно, наполняют бассейн за 8 *ч*. Известно, что производительность второго насоса равна 10 $м^3/ч$. Если производительность первого насоса увеличить на 5 $м^3/ч$, то бассейн будет наполняться с помощью первого насоса на 10 *ч* быстрее, чем с помощью второго насоса. Определить производительность первого насоса.

4. Найти все значения x, при которых справедливо неравенство

$$\frac{17}{x+4} < 3 - x.$$

5. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом A биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке D. Известно, что $AB=6$ *см*, $BC=10$ *см*. Определить площадь треугольника DBC.

Разбор варианта 1

Задача 1. Воспользуемся формулой $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ и перепишем исходное уравнение в виде

$$2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, получим

$$\sin x = 2,\ \sin x = -\frac{1}{2}.$$

Учитывая, что $|\sin x| \leqslant 1$, находим решение

$$\sin x = -\frac{1}{2},$$

$$x = -(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n.$$

Ответ: $x = -(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n.$

Задача 2. В этой задаче допустимы x и y, удовлетворяющие ограничениям $x>0$ и $y>0$. Учитывая, что

$$\log_3 y^2 = 2\log_3 y,\ \log_{1/3} y = -\log_3 y,$$

перепишем эту систему в виде

$$\begin{cases} \log_2 x + 2\log_2 y = 0, \\ 2\log_2 x + \log_2 y = 5 \end{cases}$$

и будем рассматривать ее как линейную систему двух уравнений с двумя неизвестными $\log_2 x$ и $\log_2 y$. Тогда можно определить

$$\log_2 x = \frac{10}{3},\ \log_2 y = -\frac{5}{3}.$$

Отсюда находим

$$x = 8\sqrt[3]{2};\ y = 1/3\sqrt[3]{9}.$$

Ответ: $x = 8\sqrt[3]{2};\ y = 1/3\sqrt[3]{9}.$

Задача 3. Пусть скорости первого и второго велосипедистов — v_1 *км/ч* и v_2 *км/ч* соответственно. Тогда условие задачи приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} 4(v_1 + v_2) = 100, \\ \frac{4v_1}{v_2 + 10} - \frac{4v_2}{v_1 + 5} = 1. \end{cases}$$

Исключая v_2 из второго уравнения при помощи первого, получим квадратное уравнение

$$v_1^2 + 230\, v_1 - 3675 = 0,$$

откуда находим

$$v'_1 = -145,\ v''_1 = 15.$$

Ответ: $v_1 = 15$ *км/ч.*

Задача 4. При всех x, отличных от 1, это неравенство равносильно следующему:

$$\frac{x^2+x+2}{1-x}>0.$$

Выражение $(x+2)$ перенесено в левую часть неравенства и приведено к общему знаменателю со стоящей там дробью. Квадратный трехчлен, стоящий в числителе последнего отношения, положителен при всех x, поскольку его дискриминант отрицателен и первый коэффициент положителен. Следовательно, неравенство будет выполнено, если

$$1-x>0, \text{ т. е. } x<1.$$

Ответ: $x<1$.

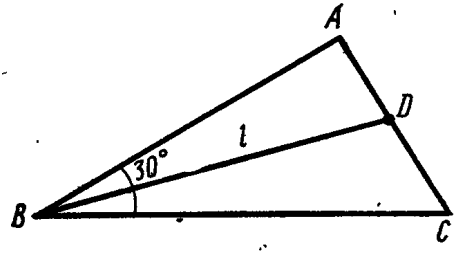


Рис. 25.

Задача 5. Для нахождения биссектрисы BD воспользуемся формулой

$$l=\frac{2ab\cos\frac{\alpha}{2}}{a+b},$$

в которой l — биссектриса, a и b — стороны треугольника, ее заключающие, α — угол между этими сторонами.

В нашей задаче (рис. 25):

$$BD=\frac{2\cdot4\cdot6\cos15^\circ}{10}=\frac{24\cos15^\circ}{5}.$$

Площадь треугольника ABD определяется по формуле

$$S=\frac{1}{2}al\sin\alpha/2$$

или

$$S_{ABD}=\frac{1}{2}\cdot4\cdot\frac{24\cos15^\circ}{5}\cdot\sin15^\circ=\frac{24\sin30^\circ}{5}=2{,}4.$$

Ответ: 2,4 *см*^{2}.

§ 13. ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, ОТДЕЛЕНИЕ ГЕОФИЗИКИ, 1972 г.

Вариант 1

1. Поезд метро состоит из нескольких вагонов, причем в каждом вагоне находится одинаковое число пассажиров. Количество пассажиров в одном вагоне превосходит число вагонов на 9. Когда на станции во второй вагон вошли 10 человек, а из остальных

вышли по 10 человек, то число пассажиров во втором вагоне оказалось равным числу пассажиров, оставшихся во всех остальных вагонах. Сколько пассажиров было первоначально в каждом вагоне?

2. Решить уравнение

$$3\operatorname{tg}^2 x + 7 = \frac{2}{\sin^2 x}.$$

3. Найти все значения x, при которых справедливо неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{2-x}} > \frac{1}{x+1}.$$

4. Трапеция $KLMN$ с основаниями KN и LM вписана в окружность, центр которой лежит на основании KN. Диагональ KM трапеции равна 4 *см*, а боковая сторона KL равна 3 *см*. Определить длину основания LM.

5. Три шара попарно касаются друг друга и некоторой плоскости. Точки касания шаров с плоскостью образуют прямоугольный треугольник с катетом, равным 3 *см*, и противолежащим углом в 30°.

Определить радиусы данных шаров.

Вариант 2

1. Колхозный сад разбит на несколько участков. На каждом участке урожай собирает одинаковое число колхозников. Известно, что число колхозников, находящихся на одном участке, превышает число участков на 14. Когда еще 15 колхозников пришли на первый участок, а с остальных участков ушли по 15 человек, то число колхозников на первом участке стало равным числу колхозников, оставшихся на всех остальных участках. Сколько колхозников было первоначально на каждом участке?

2. Решить уравнение

$$2\sin^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} = 3.$$

3. Найти все значения x, при которых справедливо неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{3-x}} > \frac{1}{x-2}.$$

4. Около трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC описана окружность радиуса 6 *см*. Центр описанной окружности лежит на основании AD. Основание BC равно 4 *см*. Определить площадь трапеции.

5. В треугольнике ABC $AC=12$ *см*, $AB=BC=3\sqrt{10}$ *см*. Два шара касаются плоскости треугольника ABC в точках A и C рас-

положены по разные стороны от этой плоскости. Расстояние между центрами этих шаров равно 15 *см*. Центр третьего шара находится в точке B, и этот шар касается двух данных шаров. Определить радиус третьего шара.

Вариант 3

В книжном шкафу имеется несколько полок. На каждой полке лежит одинаковое число книг. Известно, что число книг на полке превосходит число полок на 5. Когда на первую полку добавили 6 книг, а с каждой из остальных полок сняли по 6 книг, то число книг на первой полке оказалось равным числу книг на всех остальных полках вместе. Сколько книг первоначально лежало на одной полке?

2. Решить уравнение

$$3\operatorname{tg}^2 x - 4\cos^2 x = 8.$$

3. Найти все значения x, при которых справедливо неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{2-x}} > \frac{1}{x-1}.$$

4. Около трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC описана окружность радиуса 5 *см*. Центр описанной окружности лежит на основании AD. Основание BC равно 6 *см*. Определить диагональ AC данной трапеции.

5. Два шара касаются плоскости P в точках A и B и расположены по разные стороны от этой плоскости. Расстояние между центрами этих шаров равно 10 *см*. Третий шар касается двух данных шаров, а его центр O лежит в плоскости P. Известно, что $AO=OB=2\sqrt{10}$ *см*, $AB=8$ *см*.

Определить радиус третьего шара.

Вариант 4

1. На столе стоят коробки с карандашами. В каждой коробке находится одинаковое число карандашей. Число карандашей, лежащих в одной коробке, превышает число коробок на 8. После того как во вторую коробку положили 9 карандашей, а из остальных коробок взяли по 9 карандашей, число карандашей во второй коробке оказалось на 2 меньше, чем число карандашей, лежащих во всех остальных коробках. Сколько карандашей лежало первоначально в каждой коробке?

2. Решить уравнение

$$4\sin^2 x + 9\operatorname{tg}^2 x = 4.$$

3. Найти все значения x, при которых справедливо неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} > \frac{1}{2-x}.$$

4. Трапеция $KLMN$ с основаниями LM и KN вписана в окружность, центр которой лежит на основании KN. Диагональ LN трапеции равна 4 *см*, а угол MNK равен 60°. Определить длину основания LM трапеции.

5. В треугольнике ABC сторона AB равна 2 *см*, сторона BC равна 4 *см*, а угол B равен 60°. Три шара касаются плоскости треугольника ABC в точках A, B и C и попарно касаются между собой. Определить радиусы этих шаров.

Разбор варианта 1

Задача 1. Пусть n — первоначальное количество пассажиров в каждом вагоне. Тогда $(n-9)$ — число вагонов (причем $n>9$, n — натуральное число). Согласно условию задачи имеем уравнение

$$n+10=(n-10)(n-10),$$

или

$$n^2-21n+90=0.$$

Корни этого квадратного уравнения суть 15 и 6. Второй корень является здесь посторонним, поскольку $n>9$.

Ответ: 15 пассажиров.

Задача 2. Используя формулу

$$\frac{1}{\sin^2 x} = 1+\operatorname{ctg}^2 x$$

и вводя подстановку $y=\operatorname{tg}^2 x>0$, запишем исходное уравнение в виде

$$3y+7=2+\frac{2}{y},$$

или

$$3y^2+5y-2=0.$$

Это квадратное уравнение имеет единственный положительный корень $y=1/3$. Возвращаясь к неизвестному x, получаем

$$\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{3},\ |\operatorname{tg} x|=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Общее решение последнего уравнения имеет вид

$$x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n.$$

Легко видеть, что все найденные решения допустимы для исходного уравнения.

Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$.

Задача 3. Данное неравенство равносильно совокупности следующих двух систем:

$$1)\begin{cases}x+1<0;\\2-x>0;\end{cases}\quad 2)\begin{cases}x+1>0,\\x+1>\sqrt{2-x}.\end{cases}$$

Решая первую систему, находим $x<-1$. Решим вторую систему.

Поскольку обе части второго неравенства системы положительны, то, возводя неравенство почленно во вторую степень, получим равносильное неравенство

$$(x+1)^2>2-x>0,$$

или

$$x^2+3x-1>0 \text{ при } x<2.$$

Решая это квадратное неравенство и объединяя его решения с решением первого неравенства системы, получаем

$$\frac{-3+\sqrt{13}}{2}<x<2.$$

Ответ: $x<-1;\ \frac{-3+\sqrt{13}}{2}<x<2$.

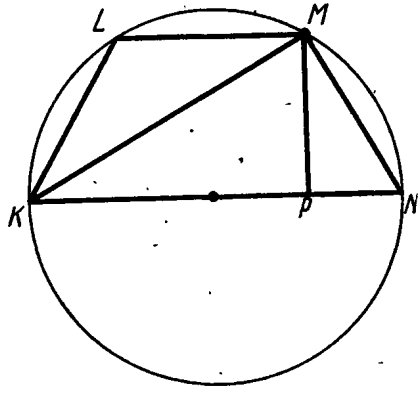


Рис. 26.

Задача 4. Несложно показать, что в окружность может быть вписана только равнобочная трапеция (рис. 26). Поэтому

$$KL=MN=3.$$

Так как угол KMN опирается на диаметр, то этот угол — прямой. Следовательно, из прямоугольного треугольника KMN можно найти KN:

$$KN=5.$$

Проведем $MP\perp KN$ и для определения высоты MP воспользуемся двумя формами записи

площади треугольника:

$$\frac{1}{2} KM \cdot MN = \frac{1}{2} MP \cdot KN,$$

т. е.

$$MP = \frac{4 \cdot 3}{5} = 2{,}4.$$

Из прямоугольного треугольника MPN получим

$$PN = \sqrt{9 - \frac{144}{25}} = 1{,}8.$$

Тогда

$$LM = 5 - 2PN = 1{,}4$$

Ответ: 1,4.

Задача 5. Чертеж к задаче представлен на рис. 27. Обозначим радиусы шаров через r_1, r_2 и r_3. Расстояние между точками касания двух шаров на плоскости равно величине соответствующей стороны прямоугольного треугольника. Центры шаров проек-

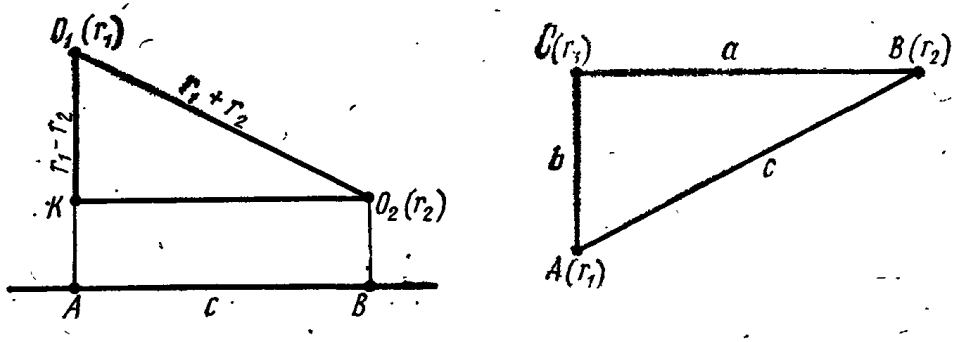


Рис. 27.

тируются на плоскость в вершины треугольника ABC, а каждая из сторон этого прямоугольного треугольника является проекцией на плоскость отрезков, равных сумме пар соответствующих радиусов. На основе этого имеем

$$AB = c = KO_2 = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2} = 2\sqrt{r_1 r_2}.$$

Аналогично этому можно получить выражения для двух других сторон треугольника:

$$BC = a = 2\sqrt{r_2 r_3}, \quad AC = b = 2\sqrt{r_3 r_1}.$$

Отсюда находим

$$r_1 r_2 = \frac{1}{4} c^2, \quad r_2 r_3 = \frac{1}{4} a^2, \quad r_3 r_1 = \frac{1}{4} b^2. \qquad (1)$$

Из треугольника ABC найдем

$$a=3\sqrt{3},\ b=3,\ c=6.$$

Перемножая почленно соотношения (1), получим

$$(r_1r_2r_3)^2=\frac{1}{64}(abc)^2 \text{ или } r_1r_2r_3=\frac{1}{8}abc.$$

Из этого соотношения определяются радиусы всех шаров. Исключая произведение радиусов каких-либо двух шаров с помощью (1), получаем

$$r_1=\frac{bc}{2a},\ r_2=\frac{ac}{2b},\ r_3=\frac{ab}{2c}.$$

Подставляя сюда значения a, b и c, находим:

$$r_1=\sqrt{3},\ r_2=3\sqrt{3},\ r_3=\frac{3}{4}\sqrt{3}.$$

Ответ: $\sqrt{3}$; $3\sqrt{3}$; $0{,}75\sqrt{3}$.

§ 14. ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, ОТДЕЛЕНИЕ ОБЩЕЙ ГЕОЛОГИИ, 1973 г.

Вариант 1

1. Решить систему

$$\begin{cases}\lg 3\cdot\lg(3x)=\lg 2\cdot\lg(2y),\\ \lg x\cdot\lg 2=\lg y\cdot\lg 3.\end{cases}$$

2. Решить уравнение

$$4^{-x+\frac{1}{2}}-7\cdot 2^{-x}-4=0.$$

3. Два велосипедиста выехали из пункта А одновременно и в одном направлении. Первый велосипедист ехал со скоростью 7 *км/ч*, а второй — со скоростью 10 *км/ч*. Через 30 *мин* из пункта А в том же направлении выехал третий велосипедист, который догнал первого велосипедиста, а через полтора часа после этого догнал и второго велосипедиста.

Определить скорость третьего велосипедиста.

4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S сторона основания равна 1 *см*. Объем пирамиды равен $\sqrt{2}/3$ *см*^{3}. Через сторону основания CD проведено сечение, которое делит пополам двугранный угол, образованный боковой гранью SCD и основанием.

Найти площадь сечения.

5. Найти все пары значений (x, y), являющиеся решениями системы

$$\begin{cases} \sin x + \frac{1}{\cos y} = 2\sqrt[9]{14}, \\ \sin x \cdot \frac{1}{\cos y} = \sqrt[3]{196} - 2 \end{cases}$$

и удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} 0 < x < \pi, \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Решить систему

$$\begin{cases} \lg 5 \cdot \lg\left(\frac{5}{x}\right) = \lg 7 \cdot \lg\left(\frac{7}{y}\right), \\ \lg x \cdot \lg 7 = \lg y \cdot \lg 5. \end{cases}$$

2. Решить уравнение

$$9^{x+1} + 3^{x+2} - 18 = 0.$$

3. На дороге, представляющей собой окружность длиной 36 *км*, пункты A и B являются диаметрально противоположными точками этой окружности. Велосипедист выехал из пункта A и сделал два круга. Первый круг он прошел с некоторой постоянной скоростью, после чего уменьшил скорость на 3 *км/ч*. Известно, что время между двумя его прохождениями через пункт B равно 5 *ч*. Определить скорость, с которой велосипедист прошел первый круг.

4. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S сторона основания равна 2 *см*. Через сторону основания BC проведено сечение, которое пересекает ребро SA в точке M. Известно, что $SM : MA = 1 : 3$, а площадь сечения равна 3 *см*^{2}.

Найти объем пирамиды $SABC$.

5. Найти все пары значений (x, y), являющиеся решениями системы

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos y} = 2\sqrt[3]{34}, \\ \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos y} = \sqrt[3]{34^2} - 5 \end{cases}$$

и удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Вариант 3

1. Решить систему

$$\begin{cases} \lg 2 \cdot \lg (2x) = \lg 3 \cdot \lg (3y), \\ \lg x \cdot \lg 3 = \lg y \cdot \lg 2. \end{cases}$$

2. Решить уравнение

$$16^{x+\frac{1}{2}} = 15 \cdot 4^x + 4.$$

3. Три работницы делают игрушки. Первая работница изготавливает 5 игрушек в час, вторая — 8 игрушек в час. Первые две работницы начали работу одновременно, а третья — на полчаса позже. Через некоторое время третья работница догнала по количеству изготовленных игрушек первую работницу, а через полтора часа после этого догнала и вторую работницу.

Определить производительность труда третьей работницы.

4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S сторона основания равна 4 *см*. Через сторону CD основания проведено сечение, которое пересекает грань SAB по средней линии треугольника SAB. Площадь сечения равна 18 *см*^{2}.

Найти объем пирамиды $SABCD$.

5. Найти все пары значений (x, y), являющиеся решениями системы

$$\begin{cases} \cos x + \frac{1}{\sin y} = \sqrt[3]{20}, \\ \cos x \cdot \frac{1}{\sin y} = \sqrt[3]{20^2} - 3 \end{cases}$$

и удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < y < \pi. \end{cases}$$

Вариант 4

1. Решить систему

$$\begin{cases} \lg 7 \lg (6x) = \lg 6 \cdot \lg (7y), \\ \lg y = \log_7 6 \cdot \lg x. \end{cases}$$

2. Решить уравнение

$$25^{-x} + 5^{-x+1} = 50.$$

3. Экскаватор роет котлованы емкостью по 20 $м^3$. После того как был вырыт первый котлован, производительность экскаватора уменьшилась на 1 $м^3/ч$. Известно, что через шесть с половиной часов после начала работы было вырыто полтора котлована.

Определить первоначальную производительность экскаватора.

4. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S через сторону BC основания проведено сечение перпендикулярно ребру SA. Плоский угол при вершине пирамиды равен 60°. Высота пирамиды равна $2\sqrt{2}$ $см$.

Найти площадь сечения.

5. Найти все пары значений (x, y), являющиеся решениями системы

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \frac{1}{\sin y} = 2\sqrt[3]{41}, \\ \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\sin y} = \sqrt[3]{41^2} - 6 \end{cases}$$

и удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} 0 < x < 2\pi, \\ 0 < y < \pi. \end{cases}$$

Разбор варианта 1

Задача 1. Выразим из второго уравнения $\lg y$ через $\lg x$

$$\lg y = \frac{\lg 2 \cdot \lg x}{\lg 3}.$$

Выполнив логарифмирование в первом уравнении, подставим в него найденное значение $\lg y$. Тогда получим

$$(\lg^2 3 - \lg^2 2) \lg x = -\lg 3 (\lg^2 3 - \lg^2 2).$$

Отсюда находим $x = 1/3$ и затем $y = 1/2$.

Ответ: $x = 1/3$, $y = 1/2$.

Задача 2. Обозначим 2^{-x} через t. Заметим, что $t>0$. Тогда получим квадратное уравнение

$$2t^2-7t-4=0.$$

Если корни $t_1=-1/2$ и $t_2=4$. Первый корень — посторонний. Поэтому нужно решить уравнение

$$2^{-x}=4$$

Находим: $x=-2$.

Ответ: $x=-2$.

Задача 3. Пусть t *ч* — время, прошедшее от начала движения первого велосипедиста до точки, в которой его догнал третий велосипедист, а v *км/ч* — скорость третьего велосипедиста. Следует заметить, что $v>10$.

Из условия задачи вытекает уравнение

$$\left(t-\frac{1}{2}\right)v=7t.$$

Аналогично этому можно записать уравнение движения относительно второго и третьего велосипедистов

$$\left(t-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)v=10\left(t+\frac{3}{2}\right).$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases}\left(t-\frac{1}{2}\right)v=7t,\\ (t+1)v=10\left(t+\frac{3}{2}\right)\end{cases}$$

путем исключения времени t, получим квадратное уравнение относительно скорости v:

$$v^2-18v+70=0,$$

корни которого $v=9\pm\sqrt{11}$. Меньший корень этого уравнения не удовлетворяет условию $v>10$. Поэтому решение задачи дает другой корень.

Ответ: $v=9+\sqrt{11}$.

Задача 4. Представляем читателю самостоятельно показать, что искомое сечение пирамиды $DCMN$ представляет собой трапецию (рис. 28).

По формуле объема пирамиды можно вычислить высоту H:

$$H=\frac{3V}{S}=\sqrt{2}.$$

Апофему боковой грани SQ определим из треугольника SOQ по теореме Пифагора

$$SQ=\sqrt{2+\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}.$$

Воспользовавшись теоремой о биссектрисе внутреннего угла треугольника, находим из SQK:

$$\frac{PK}{SP}=\frac{PK}{\frac{3}{2}-PK}=\frac{1}{3/2}.$$

Следовательно, $SP=0{,}9$.

Для определения меньшего основания MN трапеции $DCMN$ рассмотрим подобные треугольники SMN и SAB.

$$\frac{MN}{AB}=\frac{SP}{SK};\ MN=\frac{SP\cdot AB}{SK},$$

$$MN=\frac{0{,}9\cdot 1}{3/2}=\frac{3}{5}.$$

Высота PQ трапеции $CDMN$ является биссектрисой треугольника SKQ. Используя формулу для определения длины l биссектрисы по двум сторонам a и b и углу γ между ними

$$l=\frac{2ab\cos\gamma}{a+b}$$

(эта формула получается путем приравнивания площади треугольника, вычисленной по двум сторонам и углу между ними, сумме площадей, на которые биссектриса делит этот треугольник), найдем высоту PQ:

$$PQ=\frac{2\cdot 1\cdot\frac{3}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{1+\frac{3}{2}},$$

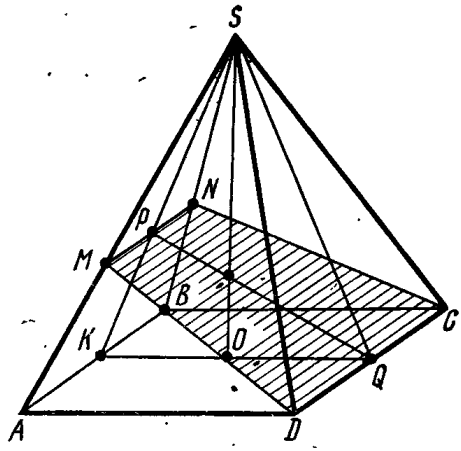


Рис. 28

где α — угол SQK. Далее вычисляем

$$PQ=\frac{6}{5}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Воспользуемся формулами

$$S=\frac{1}{2}SQ\cdot KQ\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}SO\cdot KQ.$$

Тогда

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{3}{2}\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{2},\ \text{т. е.}\ \sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Следовательно,

$$\cos\alpha=\sqrt{1-8/9}=\frac{1}{3}.$$

Используя формулу косинуса двойного угла, находим

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1=\frac{1}{3},\ \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{2/3}$$

и, наконец, площадь сечения

$$S=\frac{MN+CD}{2}\cdot PQ=\frac{8\sqrt{6}}{25}.$$

Ответ: $8\sqrt{6}/25$.

Задача 5. Обозначим $\sin x$ буквой m, $1/\cos y$ — n. Тогда из условия задачи следует, что $0\leqslant m\leqslant 1$, $n>1$.

Запишем систему уравнений следующим образом:

$$\begin{cases} m+n=2\sqrt[3]{14}, \\ mn=\sqrt[3]{196}-2. \end{cases}$$

Вспоминая теорему Виета, заметим, что решения этой системы являются корнями квадратного уравнения

$$t^2-2\sqrt[3]{14}\cdot t+\sqrt[3]{196}-2=0.$$

Находим

$$t_{1,2}=\sqrt[3]{14}\pm\sqrt{2}.$$

Здесь возможны два случая:

$$1)\ \begin{cases} m=\sqrt[3]{14}+\sqrt{2}, \\ n=\sqrt[3]{14}-\sqrt{2}; \end{cases}\qquad 2)\ \begin{cases} m=\sqrt[3]{14}-\sqrt{2}, \\ n=\sqrt[3]{14}+\sqrt{2}. \end{cases}$$

Первый из них рассматривать не нужно, так как $0\leqslant m\leqslant 1$, $n>1$. Второй случай дает

$$\sin x=\sqrt[3]{14}-\sqrt{2},\ \cos x=\frac{1}{\sqrt[3]{14}+\sqrt{2}}.$$

Учитывая условие $0<x<\pi$, находим решения первого уравнения

$$x_1=\arcsin(\sqrt[3]{14}-\sqrt{2});\ x_2=\pi-\arcsin(\sqrt[3]{14}-\sqrt{2}).$$

Решениями второго уравнения, удовлетворяющими условию $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ являются числа

$$y_1=\arccos\frac{1}{\sqrt[3]{14}+\sqrt{2}}\ \text{ и }\ y_2=-\arccos\frac{1}{\sqrt[3]{14}+\sqrt{2}}.$$

Поэтому рассматриваемая система имеет четыре решения:

$$(x_1, y_1); (x_1, y_2); (x_2, y_1); (x_2, y_2).$$

Ответ: $x = \arcsin(\sqrt[3]{14} - \sqrt{2})$, $y = \arccos \frac{1}{\sqrt[3]{14} + \sqrt{2}}$;

$x = \arcsin(\sqrt[3]{14} - \sqrt{2})$, $y = -\arccos \frac{1}{\sqrt[3]{14} + \sqrt{2}}$;

$x = \pi - \arcsin(\sqrt[3]{14} - \sqrt{2})$, $y = \arccos \frac{1}{\sqrt[3]{14} + \sqrt{2}}$;

$x = \pi - \arcsin(\sqrt[3]{14} - \sqrt{2})$, $y = -\arccos \frac{1}{\sqrt[3]{14} + \sqrt{2}}$.

§ 15. ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, ОТДЕЛЕНИЕ ГЕОФИЗИКИ, 1973 г.

Вариант 1

1. Решить систему

$$\begin{cases} x + \sin(x + y) = \frac{3}{2}, \\ 3x - \sin(x + y) = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

2. Решить неравенство

$$4^{-x+\frac{1}{2}} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0.$$

3. Два велосипедиста выехали из пункта А одновременно и в одном направлении. Первый велосипедист ехал со скоростью 7 *км/ч*, а второй — со скоростью 10 *км/ч*. Через 30 *мин* из пункта А в том же направлении выехал третий велосипедист, который догнал первого велосипедиста, а через полтора часа после этого догнал и второго велосипедиста.

Определить скорость третьего велосипедиста.

4. Решить неравенство

$$\log_{2x-x^2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^4 > 0.$$

5. На плоскости дан прямой угол. Окружность с центром, расположенным внутри этого угла, касается одной стороны угла, пересекает другую сторону в точках A и B и пересекает биссектрису угла в точках C и D. Длина хорды AB равна $\sqrt{6}$ *см*, длина хорды CD равна $\sqrt{7}$ *см*. Найти радиус окружности.

Вариант 2

1. Решить систему

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(x+y) - 5x = -9, \\ 5\operatorname{tg}(x+y) + x = 7. \end{cases}$$

2. Решить неравенство

$$16^{x+\frac{1}{2}} \leqslant 15 \cdot 4^x + 4.$$

3. На дороге, представляющей собой окружность длиной в 36 *км*, пункты A и B являются диаметрально противоположными точками этой окружности. Велосипедист выехал из пункта A и сделал два круга. Первый круг он прошел с некоторой постоянной скоростью, после чего уменьшил скорость на 3 *км/ч*. Известно, что время между двумя его прохождениями через пункт B равно пяти часам.

Определить скорость, с которой велосипедист прошел первый круг.

4. Решить неравенство

$$\log_{-4x^2+12x-8} |4x-5| > 0.$$

5. На плоскости дан прямой угол. Окружность с центром, расположенным вне этого угла, касается биссектрисы прямого угла, пересекает одну из его сторон в точках A и B и пересекает продолжение другой стороны в точках C и D. Длина хорды AB равна $\sqrt{7}$ *см*, длина хорды CD равна 1 *см*.

Найти радиус окружности.

Вариант 3

1. Решить систему

$$\begin{cases} \cos(x-y) - 2y = -\frac{3}{2}, \\ 3\cos(x-y) + y = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

2. Решить неравенство

$$9^{x+1} + 3^{x+2} - 18 > 0.$$

3. Три работницы делают игрушки. Первая работница изготовляет 5 игрушек в час, вторая — 8 игрушек в час. Первые две работницы начали работу одновременно, а третья на полчаса позже. Через некоторое время третья работница догнала по количеству изготовленных игрушек первую работницу, а через полтора часа после этого догнала и вторую работницу.

Определить производительность труда третьей работницы.

4. Решить неравенство

$$\log_{\frac{4}{3}x-\frac{4}{9}x^2}(x-2)^2>0.$$

5. На плоскости дан угол величины $\pi/3$. Окружность касается одной стороны этого угла, пересекает другую сторону в точках A и B и пересекает биссектрису угла в точках C и D. Длина хорды AB равна $\sqrt{6}$ *см*, длина хорды CD равна $\sqrt{6}$ *см*.

Найти площадь круга, ограниченного этой окружностью.

Вариант 4

1. Решить систему

$$\begin{cases}2y-\operatorname{ctg}(x-y)=3,\\ 3y+2\operatorname{ctg}(x-y)=8.\end{cases}$$

2. Решить неравенство

$$25^{-x}-5^{-x+1}\geqslant 50.$$

3. Экскаватор роет котлованы емкостью по 20 $м^3$. После того как был вырыт первый котлован, производительность экскаватора уменьшилась на 1 $м^3/ч$. Известно, что через шесть с половиной часов после начала работы было вырыто полтора котлована.

Определить первоначальную производительность экскаватора.

4. Решить неравенство

$$\log_{-x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}|16x-3|<0.$$

5. На плоскости дан прямой угол. Окружность с центром, расположенным вне этого угла, касается продолжения одной из его сторон, пересекает другую сторону в точках A и B и пересекает биссектрису этого угла в точках C и D. Длина хорды AB равна $\sqrt[4]{2}$ *см*, длина хорды CD равна 2 *см*.

Найти радиус окружности.

Разбор варианта 1

Задача 1. Складывая друг с другом уравнения системы, получим

$$4x=4,\ x=1.$$

После этого имеем одно уравнение

$$\sin(y+1)=\frac{1}{2}.$$

Из этого уравнения находим:

$$y+1=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,$$

$$y=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n-1.$$

Ответ:

$$x=1,\ y=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n-1.$$

Задача 2. Обозначая 2^{-x} буквой t, получим квадратное неравенство

$$2t^2-7t-4<0.$$

Решения этого неравенства имеют вид

$$-\frac{1}{2}<t<4.$$

Учитывая, что показательная функция всегда положительна, находим

$$2^{-x}<4,$$

$$-x<2,$$

$$x>-2.$$

Ответ: $x>-2$.

Задача 3. Обозначим скорость третьего велосипедиста v *км/ч*. Очевидно, что $v>10$. В тот момент, когда этот велосипедист выехал из пункта А, первый велосипедист находился уже в 3,5 *км* от пункта А, а второй велосипедист — в 5 *км* от А. Третий велосипедист догоняет первого велосипедиста через t_1 *ч*, а второго велосипедиста — через t_2 *ч*:

$$t_1=\frac{3{,}5}{v-7},\ t_2=\frac{5}{v-10}.$$

Условие задачи равносильно уравнению

$$\frac{5}{v-10}-\frac{3{,}5}{v-7}=1{,}5\ (v>10).$$

Это уравнение легко приводится к квадратному уравнению

$$v^2-18v+70=0,$$

которое имеет только один корень, удовлетворяющий условию $v>10$:

$$v=9+\sqrt{11}.$$

Ответ: $(9+\sqrt{11})$ *км/ч*.

Задача 4. Область допустимых значений неизвестных в неравенстве

$$\log_{2x-x^2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^4>0$$

находится из следующих ограничений:

$$1)\ 2x-x^2>0,\ 2)\ 2x-x^2\neq 1,\ 3)\ x\neq\frac{3}{2}$$

$$0<x<2;\ x\neq 1.$$

Объединяя полученные ограничения, находим ОДЗ:

$$1)\ 0<x<1;\ 2)\ 1<x<\frac{3}{2};\ 3)\ \frac{3}{2}<x<2.$$

Заметим, что выражение $\left(x-\frac{3}{2}\right)$ может быть как положительным, так и отрицательным. Это связано с четностью показателя степени, в которую возводится стоящее под знаком логарифма выражение. Следует также отметить, что формула

$$\log_a[f(x)]^{2k}=2k\log_a[f(x)],$$

где k — целое число, не может быть здесь применена, поскольку она нарушает ОДЗ. В правой части последнего равенства функция $f(x)$ должна быть обязательно положительной, в то время как в левой части этого равенства допустимы и отрицательные ее значения. Поэтому нужно использовать другую формулу, всегда приводящую к равносильному выражению:

$$\log_a[f(x)]^{2k}=2k\log_a|f(x)|.$$

Вернемся к нашему неравенству. Нужно рассмотреть два случая:

1) $2x-x^2>1$, $(x-1)^2<0$.

Здесь решений нет;

2) $2x-x^2<1$, $(x-1)^2>0$.

Это выполняется для всех x из ОДЗ. Поэтому основание у логарифма в рассматриваемом неравенстве всегда больше единицы. Имеем

$$\left|x-\frac{3}{2}\right|<1,$$

$$\frac{1}{2}<x<\frac{5}{2}.$$

Учитывая ограничения ОДЗ, находим

$$\frac{1}{2}<x<1,\ 1<x<\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}<x<2.$$

Ответ:

$$1)\ \frac{1}{2}<x<1;\quad 2)\ 1<x<\frac{3}{2};\quad 3)\ \frac{3}{2}<x<2.$$

Задача 5. Пусть точка K — вершина прямого угла (рис. 29). Легко сообразить, что центр окружности, точка O, лежит выше биссектрисы прямого угла KD, т. е. внутри угла BKD. Действительно, радиус окружности ON, проведенный в точку касания со стороной угла, больше, чем расстояние от центра окружности до другой стороны угла

$$ON>KN=OM.$$

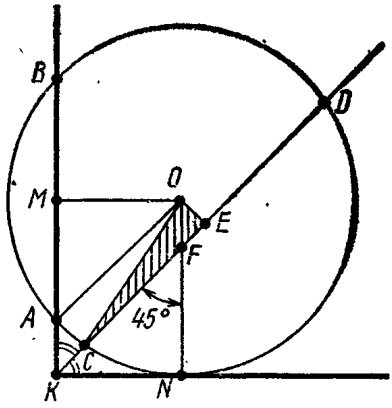


Рис. 29.

Проведем $OE\perp CD$. Тогда точка E будет серединой хорды CD. По теореме Пифагора имеем

$$OC^2=OE^2+CE^2\left(CE=\frac{\sqrt{7}}{2}\right).\quad (1)$$

Обозначим OC буквой R. Тогда из прямоугольного треугольника AOM находим

$$OM=\sqrt{R^2-\frac{3}{2}}.$$

Поскольку $FN=KN=OM$, то

$$OF=ON-FN=R-\sqrt{R^2-\frac{3}{2}}.$$

Из прямоугольного равнобедренного треугольника OEF имеем

$$OE=\frac{\sqrt{2}}{2}OF=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(R-\sqrt{R^2-\frac{3}{2}}\right).$$

Подставляя OE в равенстве (1), получим уравнение

$$R^2=\frac{1}{2}\left(R-\sqrt{R^2-\frac{3}{2}}\right)^2+\frac{7}{4},$$

или

$$R\sqrt{R^2-\frac{3}{2}}=1,$$

$$2R^4-3R^2-2=0,$$

$$R=\sqrt{2}.$$

Ответ: $R=\sqrt{2}$ *см.*

§ 16. ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, ОТДЕЛЕНИЕ ОБЩЕЙ ГЕОЛОГИИ, 1974 г.

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\sqrt{x+7}-x+3=0.$$

2. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 5^{2t}-5^{2t}-6\cdot 5^{t}>0, \\ 2\cdot 5^{2t}+5^{t+1}-12>0. \end{cases}$$

3. Найти все решения уравнения

$$\log_4(1+\operatorname{tg}^2 x)+\log_2\cos 2x-\log_{\sqrt{2}}\sqrt{\cos x}=-2,$$

удовлетворяющие условию $0\leqslant x<2\pi$.

4. Дан треугольник ABC. Известно, что $AB=4$ *см*, $AC=2$ *см*, $BC=3$ *см*. Биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке K. Прямая, проходящая через точку B параллельно AC, пересекает продолжение биссектрисы AK в точке M. Найти длину отрезка KM.

5. Дана правильная четырехугольная пирамида $PABCD$ с вершиной P. Сторона основания равна 1 *см*, высота пирамиды равна $\sqrt{2}$ *см*. На ребрах PA и PC взяты точки K и M соответственно, причем $AK:KP=1:3$, $CM=PM$. Найти отношение, в котором делится ребро PB плоскостью, проведенной через точки D, K и M.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\sqrt{x+8}-x+2=0.$$

2. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 3^{2x+1}-3^{x+2}+6>0, \\ 3^{2x+2}-2\cdot 3^{x+2}-27<0. \end{cases}$$

3. Найти все решения уравнения

$$\log_2(\sin x\cdot\cos x)-\log_4\operatorname{tg}^2 x+\log_{\frac{1}{2}}\cos 2x=2,$$

удовлетворяющие условию $0\leqslant x<2\pi$.

4. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C. Угол CAB равен α. Биссектриса угла ABC пересекает катет AC в точке K. На стороне BC как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу AB в точке M. Найти угол AMK.

5. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. На продолжении ребра CD взята точка K так, что $KD : KC = 3 : 4$. На ребре SC взята точка L так, что $SL : LC = 2 : 1$. В каком отношении делит объем пирамиды плоскость, проведенная через точки K, B и L?

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$\sqrt{x+9} + x + 8 = 0.$$

2. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 6 \cdot 2^{4y} + 2^{2y} - 12 > 0, \\ 2^{2y} + 2^{y+1} - 8 < 0. \end{cases}$$

3. Найти все решения уравнения

$$\log_{\sqrt{3}} \sqrt{\operatorname{ctg} x} + \log_3 \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 2,$$

удовлетворяющие условию $0 \leqslant x < 2\pi$.

4. Дана равнобочная трапеция $ABCD$. Известно, что $AD = 10$ *см*, $BC = 2$ *см*, $AB = CD = 5$ *см*. Биссектриса угла BAD пересекает продолжение основания BC к точке K. Найти длину биссектрисы угла ABK в треугольнике ABK.

5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, длина ребра которого равна 1 *см*. На ребрах AA_1, BB_1, DD_1 взяты соответственно точки K, P и M — так, что $AK : A_1K = 1 : 3$, $BP : B_1P = 3 : 1$, $DM : D_1M = 3 : 1$.

Найти объем пирамиды, у которой основанием служит сечение куба плоскостью, проходящей через точки K, P и M, а вершина расположена в точке A_1.

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$\sqrt{10 - x} - x + 9 = 0.$$

2. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 6 \cdot 7^{2x} - 7^{x+1} + 2 > 0, \\ -7^{2(x+1)} + 11 \cdot 7^{x+1} - 30 > 0. \end{cases}$$

3. Найти все решения уравнения

$$\log_3 \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + \log_{\frac{1}{3}} \sin 2x - \log_{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 1,$$

удовлетворяющие условию $0 \leqslant x < 2\pi$.

4. Дана трапеция $ABCD$, у которой угол BAD — прямой. На стороне AB как на диаметре построена окружность, которая пере-

секает диагональ BD в точке M. Известно, что $AB=3$ *см*, $AD=4$ *см*, $BC=1$ *см*. Найти синус угла CAM.

5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, длина ребра которого равна 1 *см*. На ребрах BB_1 и DD_1 взяты точки K и P соответственно, причем $BK:B_1K=1:3$, $DP=PD_1$. Плоскость, проведенная через точки A, K и P, пересекает диагонали A_1D и B_1C в точках M и T соответственно.

Найти длину отрезка MT.

Разбор варианта 1

Задача 1. Отметим, что $x\geqslant -7$, и запишем это уравнение в следующем виде:

$$\sqrt{x+7}=x-3.$$

Поскольку левая часть уравнения неотрицательна, то можно заключить, что всякое его решение должно удовлетворять условию $x\geqslant 3$. При этом данное уравнение равносильно уравнению

$$x+7=(x-3)^2$$

или

$$x^2-7x+2=0,$$

которое имеет только одно решение, удовлетворяющее условию $x\geqslant 3$:

$$x=\frac{7+\sqrt{41}}{2}.$$

Ответ: $x=(7+\sqrt{41}/2)|$.

Задача 2. Данная система равносильна системе неравенств

$$\begin{cases} 5^t(5^{2t}-5^t-6)>0, \\ 2\cdot 5^{2t}+5\cdot 5^t-12>0. \end{cases}$$

Пусть $5^t=m$, где $m>0$. Тогда имеем

$$\begin{cases} m^2-m-6>0, \\ 2m^2+5m-12>0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (m+2)(m-3)>0, \\ 2(m+4)(m-3/2)>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m<-2;\ m>3, \\ m<-4;\ m>3/2. \end{cases}$$

Учитывая, что $m>0$, найдем общее решение системы: $m>3$.

После этого имеем:

$$5^t>3,\ t>\log_5 3.$$

Ответ: $t>\log_5 3$.

Задача 3. Рассмотрим сначала условия

$$\cos x>0, \qquad \cos 2x>0, \qquad \cos x\neq 0,$$

которые в совокупности с условием $0\leqslant x<2\pi$ определяют область допустимых значений в этой задаче. Условие $\cos x>0$ показывает, что следует рассматривать только те области x, для которых $0\leqslant x<\pi/2$ и $3\pi/2<x<2\pi$, а условие $\cos 2x>0$ еще более ограничивает множество рассматриваемых x, оставляя две области:

$$0\leqslant x<\frac{\pi}{4} \quad \text{и} \quad \frac{7\pi}{4}<x<2\pi. \tag{1}$$

В этих областях исходное уравнение преобразуется к следующему виду:

$$\log_2\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}+\log_2\cos 2x-\log_2\cos x=-2,$$

или

$$\log_2\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}\cdot\cos 2x}{\cos x}=-2$$

и далее

$$\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}\cdot\cos 2x=\frac{\cos x}{4},$$

$$\frac{\cos 2x}{\cos x}=\frac{\cos x}{4},$$

$$4(2\cos^2 x-1)=\cos^2 x;\ \cos^2 x=\frac{4}{7}.$$

Учитывая, что $\cos x>0$, имеем окончательно $\cos x=\sqrt{4/7}$.

Запишем решения последнего уравнения, которые удовлетворяют условиям (1). Для этого сравним числа $\sqrt{4/7}$ и $\sqrt{2}/2$. Последнее представляет собой косинус $\pi/4$. Имеем

$$\frac{\sqrt{2}}{2}<\sqrt{\frac{4}{7}}.$$

Заметим, что косинус в первой четверти монотонно убывает; поэтому большее значение косинуса у меньших чисел. Значит,

$$\frac{\pi}{4}>\arccos\sqrt{\frac{4}{7}}.$$

Поэтому $x=\arccos\sqrt{4/7}$ — есть одно из решений уравнения, удовлетворяющее условию $0\leqslant x<\pi/4$. Других решений в первой четверти нет. Однако в области $7\pi/4<x<2\pi$ имеется еще одно решение:

$$x=2\pi-\arccos\sqrt{4/7}.$$

Механизм нахождения этих решений можно легко понять из рис. 30.

Ответ: $\arccos\sqrt{4/7}$, $2\pi-\arccos\sqrt{4/7}$.

Задача 4. Чертеж к этой задаче представлен на рис. 31. Прежде всего следует заметить, что треугольник ABM — равнобедренный. Поскольку $BM \| AC$, то $\angle BAM = \angle BMA$ как накрест лежащие. А так как $\angle BAM = \angle MAC$, то углы при основании треугольника ABM равны и он — равнобедренный. Следовательно, $BM = 4$.

Треугольники BKM и AKC подобны с коэффициентом подобия, равным 2. Поэтому искомый отрезок KM вдвое больше биссектрисы AK. Вычислим поэтому длину биссектрисы AK.

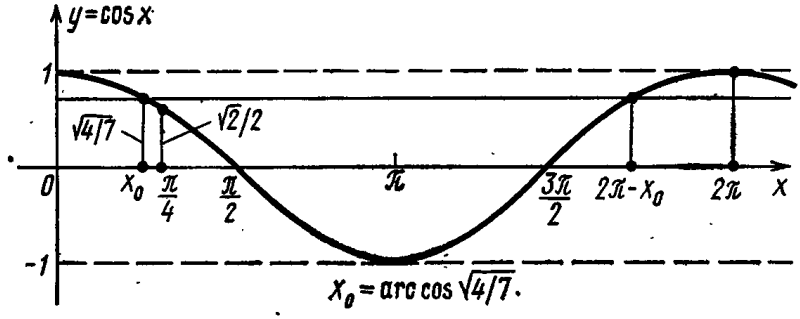


Рис. 30.

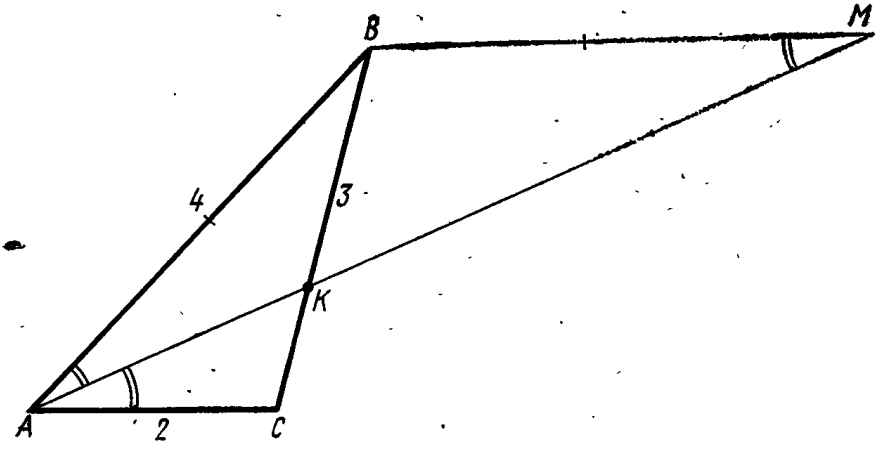


Рис. 31.

По теореме косинусов, примененной в треугольнике ABC, находим косинус угла A, который обозначим 2α:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos 2\alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \frac{16 + 4 - 9}{2 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{11}{16}.$$

Далее легко найти косинус угла α:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \frac{27}{32}, \quad \cos \alpha = \sqrt{\frac{27}{32}}.$$

Обозначим AK буквой l и запишем площадь треугольника ABC двумя различными способами:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 2\alpha = \frac{1}{2} AB \cdot l \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2} AC \cdot l \cdot \sin\alpha.$$

Отсюда находим

$$l = \frac{2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\alpha}{AB + AC}$$

и после вычислений:

$$l = \sqrt{6},\ 2l = 2\sqrt{6}.$$

Ответ: $2\sqrt{6}$.

Задача 5. Прежде всего построим сечение пирамиды плоскостью, о которой идет речь в задаче, рис. 32. Соединим точки K и D, M и D. Поскольку точки K и M лежат в плоскости сечения, то в этой плоскости лежит и весь отрезок прямой KM, и, значит, точка L, в которой он пересекает высоту пирамиды PO. Таким образом, в плоскости треугольника PBD имеются уже две точки L и D, принадлежащие искомому сечению. Следовательно, этому сечению принадлежит вся прямая LD, которая пересекается с ребром пирамиды PB в точке N. Соединив точку N с точками K и M, получим все сечение $DKNM$.

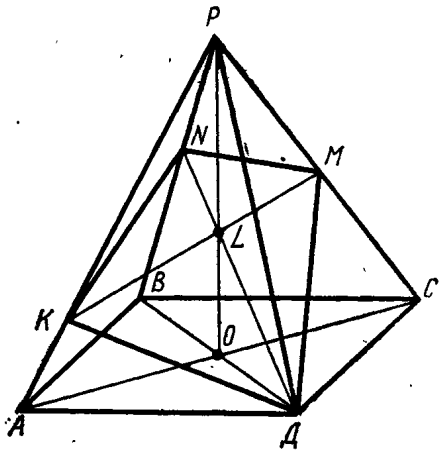


Рис. 32.

Метод построения сечения в этой задаче определяет и метод вычислений. Он состоит из двух этапов. На первом этапе рассматривается плоскость треугольника APC и определяется, в каком отношении отрезок KM делит высоту PO, рис. 33. На первом этапе рассматривается плоскость треугольника BPD и определяется, в каком отношении отрезок LD делит своим продолжением сторону PB. При этом оказывается, что размеры пирамиды не имеют значения для окончательного результата.

Рассмотрим сначала $\triangle APC$. Проведем $KK' \| AC$ и $EF \| PC$. Отрезок EF обозначим через x. Имеем:

$$PE = \frac{3}{4} \cdot PO;\ PK' = \frac{3}{4} \cdot PC;\ PM = 2MK' = \frac{1}{2} \cdot PC;$$

$$EF = x;\ MK' = 2x;\ PM = 4x.$$

При написании этих равенств было учтено, что EF есть средняя линия треугольника KMK', а M — середина стороны PC.

Из подобия треугольников EFL и PML, в которых $EF=x$ и $PM=4x$, находим, что $PL=4\cdot EL$. Поскольку $PE=3/4\cdot PO$, то легко заключить, что

$$PL=\frac{3}{5}\cdot PO \text{ или } PL:LO=3:2.$$

Обратимся к треугольнику BPD, рис. 33. Проведем $OS=y$ параллельно BP. Тогда треугольники OLS и NPL будут подобны

$$\frac{NP}{OS}=\frac{PL}{LO}=\frac{3}{2}, \text{ т. е. } NP=\frac{3}{2}\cdot y.$$

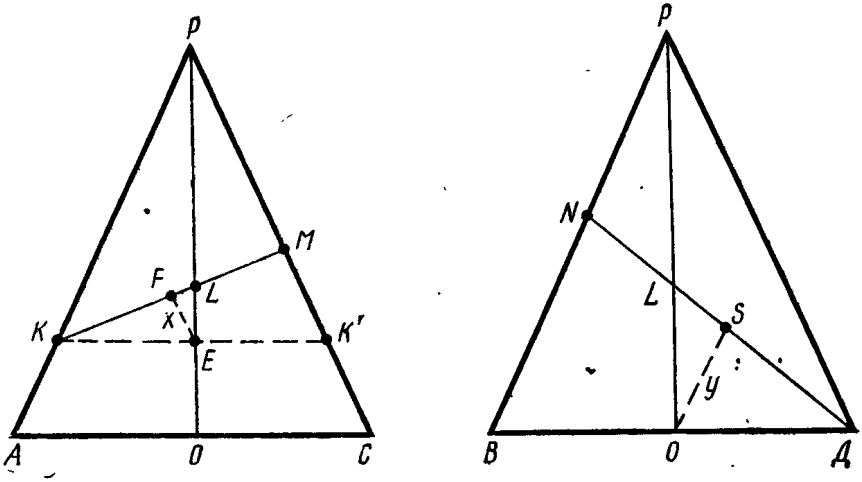


Рис. 33.

Поскольку OS — средняя линия треугольника BND, то $BN=2y$. Отсюда находим

$$\frac{NP}{BN}=\frac{3}{2}y:2y=3:4.$$

Ответ: $NP:BN=3:4$.

§ 17. ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, ОТДЕЛЕНИЕ ГЕОФИЗИКИ, 1974 г.

Вариант 1

1. Решить неравенство

$$(2x^2+11x+6)(2x^2+11x+13)>8.$$

2. Решить уравнение

$$\log_{\frac{1}{4}}(x^2+2x-8)^2-\log_{\frac{1}{2}}(10+3x-x^2)=1.$$

3. Определить, при каких целых значениях k система

$$\begin{cases} (\arcsin x)^3 + (\arccos y)^3 = \pi^3(k+1), \\ \arcsin x + \arccos y = \pi \end{cases}$$

имеет решения, и найти все эти решения.

4. В прямой круговой цилиндр с радиусом основания, равным 1 *см*, вписаны четыре одинаковых шара так, что они лежат на нижнем основании цилиндра, касаются его боковой поверхности, и каждый шар касается двух из трех других шаров. Площадь боковой поверхности цилиндра равна

$$\frac{10\pi}{(1+\sqrt{2})}\ см^2.$$

Найти объем прямого кругового конуса, основание которого совпадает с верхним основанием цилиндра и который касается всех четырех шаров.

5. Дан треугольник ABC. На стороне BC взята точка P, а на стороне AC взята точка M так, что $\angle APB = \angle BMA = \pi/4$. Отрезки AP и BM пересекаются в точке O. Известно, что площади треугольников BOP и AOM равны между собой, $BC=1$ *см*, $BO=\sqrt{2}/2$ *см*.

Найти площадь треугольника ABC.

Вариант 2

1. Решить неравенство

$$(x^2+3x+1)(x^2+3x-3) \geqslant 5.$$

2. Решить уравнение

$$\log_{16}(x^2-2x-3)^2 - 2\log_{16}(x^2+x-2) = \frac{1}{2}.$$

3. Определить, при каких целых значениях система

$$\begin{cases} (\operatorname{arctg} x)^2 + (\arccos y)^2 = \pi^2 k, \\ \operatorname{arctg} x + \arccos y = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

имеет решения, и найти все эти решения.

4. В прямой круговой цилиндр с радиусом основания $r=1$ *см* и высотой $H=12/(3+2\sqrt{3})$ *см* вписаны три одинаковых шара так, что шары касаются верхнего основания цилиндра, его боковой поверхности и попарно друг друга.

Найти объем прямого кругового конуса, основание которого совпадает с нижним основанием цилиндра и который касается всех трех шаров.

5. Дан треугольник ABC. Из вершины A проведена медиана AM, а из вершины B — медиана BP. Известно, что угол APB равен углу BMA, косинус угла ACB равен 0,8 и $BP=1$ *см*.

Найти площадь треугольника ABC.

Вариант 3

1. Решить неравенство

$$(2x^2-3x-8)(2x^2-3x-6)<3.$$

2. Решить уравнение

$$\log_{\frac{1}{9}}(x^2-x-6)^2-\log_{\frac{1}{3}}(4-3x-x^2)=\log_3\frac{1}{2}.$$

3. Определить, при каких целых значениях k система

$$\begin{cases}\arccos x+(\arcsin y)^2=k\cdot\frac{\pi^2}{4},\\ (\arcsin y)^2\cdot\arccos x=\frac{\pi^4}{16}\end{cases}$$

имеет решения, и найти все эти решения.

4. В прямой круговой цилиндр с радиусом основания, равным 3/2 *см*, и высотой, равной 6 $(\sqrt{2}-1)$ *см*, вписаны четыре одинаковых шара так, что они касаются верхнего основания цилиндра и его боковой поверхности, и каждый из шаров касается двух из трех других шаров.

Найти площадь боковой поверхности прямого кругового конуса, основание которого совпадает с нижним основанием цилиндра и который касается всех четырех шаров.

5. В треугольнике ABC биссектриса угла при вершине A пересекает сторону BC в точке M, а биссектриса угла при вершине B пересекает сторону AC в точке P. Биссектрисы AM и BP пересекаются в точке O. Известно, что треугольник BOM подобен треугольнику AOP, $BO=(1+\sqrt{3})\cdot OP$, $BC=1$ *см*.

Найти площадь треугольника ABC.

Вариант 4

1. Решить неравенство

$$(x^2+10x+12)(x^2+10x+13)\leqslant 12.$$

2. Решить уравнение

$$\log_9(x^2+5x+4)^2-\log_3(x^2+x-6)=1.$$

3. Определить, при каких целых значениях k система

$$\begin{cases} (\arccos x)^2+(\operatorname{arctg} y)^2+(\arccos x)(\operatorname{arctg} y)=\pi^2 k, \\ \arccos x-\operatorname{arctg} y=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

имеет решения, и найти все эти решения.

4. В прямой круговой цилиндр с радиусом основания, равным $(2\sqrt{3}+3)$ *см*, вписаны три одинаковых шара так, что они лежат на нижнем основании цилиндра, касаются его боковой поверхности и попарно друг друга. Объем прямого кругового конуса, основание которого совпадает с верхним основанием цилиндра, а боковая поверхность касается всех трех шаров, относится к объему цилиндра, как $\sqrt{3}:9$.

Найти высоту цилиндра.

5. В треугольнике ABC на стороне BC взята точка P, а на стороне AC взята точка M. Отрезки AP и BM пересекаются в точке O. Известно, что треугольники BOP, AOM и AOB подобны, $BM=1$ *см*, косинус угла ABC равен 0,6.

Найти площадь треугольника ABC.

Разбор варианта 1

Задача 1. Введем новую неизвестную t посредством равенства

$$t=2x^2+11x+6.$$

Тогда неравенство примет следующий вид:

$$t(t+7)>8$$

или

$$t^2+7t-8>0.$$

Его решения: $t<-8$ и $t>1$. После этого имеем

1. $2x^2+11x+6<-8$,
   $2x^2+11x+14<0$,
   $-3{,}5<x<-2$.
2. $2x^2+11x+6>1$,
   $2x^2+11x+5>0$,
   а) $x>-0{,}5$; б) $x<-5$.

Ответ: $x<-5$; $-3{,}5<x<-2$; $x>-0{,}5$.

Задача 2. Область допустимых значений определяется неравенствами

$$x^2+2x-8\neq 0 \quad \text{и} \quad 10+3x-x^2>0,$$

из которых следует, что $-2<x<2$ и $2<x<5$.

Следует специально подчеркнуть, что выражение

$$x^2+2x-8$$

может быть как положительным, так и отрицательным, поскольку под знаком логарифма стоит не само выражение, а его квадрат. Кроме того, в подобном случае следует применить формулу

$$\log_{\frac{1}{4}}(x^2+2x-8)^2=\log_{\frac{1}{2}}|x^2+2x-8|,$$

которая, очевидно, сохраняет без изменения область определения этой функции.

Имеем $\log_{\frac{1}{2}}\frac{|x^2+2x-8|}{10+3x-x^2}=1$,

$$|x^2+2x-8|=\frac{1}{2}(10+3x-x^2).$$

Для решения этого уравнения нужно рассмотреть два случая.

1) $2<x<5$. Тогда $x^2+2x-8>0$ и

$$x^2+2x-8=\frac{1}{2}(10+3x-x^2).$$

Отсюда находим

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{313}}{6},\quad x_2=\frac{-1+\sqrt{313}}{6}.$$

Неравенству $2<x<5$ удовлетворяет только второе значение x;

2) $-2<x<2$. Тогда $x^2+2x-8<0$ и

$$-(x^2+2x-8)=\frac{1}{2}(10+3x-x^2).$$

Отсюда находим

$$x_1=\frac{-7+\sqrt{73}}{2},\quad x_2=\frac{-7-\sqrt{73}}{2}.$$

Неравенству $-2<x<2$ удовлетворяет только первое значение x.

Ответ:

$$x=\frac{-1+\sqrt{313}}{6},\quad x=\frac{-7+\sqrt{73}}{2}.$$

Задача 3. Сделаем замену неизвестных по формулам

$$t=\arcsin x \quad \text{и} \quad m=\arccos y,$$

где $-\pi/2\leqslant t\leqslant\pi/2$ и $0\leqslant m\leqslant\pi$. Тогда исходная система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} t^2+m^2=\pi^2(k+1), \\ t+m=\pi. \end{cases}$$

Раскладывая сумму кубов в произведение, имеем

$$(t+m)(t^2+m^2-tm)=\pi^3(k+1)$$

или

$$(t+m)[(t+m)^2-3tm]=\pi^3(k+1)$$

и с учетом второго уравнения системы

$$\pi^2-3tm=\pi^2(k+1),$$

$$tm=-\frac{\pi^2k}{3}.$$

Таким образом, имеем систему двух уравнений

$$\begin{cases} mt=-\frac{\pi^2k}{3}, \\ m+t=\pi, \end{cases}$$

содержащую целочисленный параметр k. Оценим, какие значения может принимать этот параметр.

Поскольку $-\pi/2\leqslant t\leqslant\pi/2$ и $0\leqslant m\leqslant\pi$, то $-\pi^2/2\leqslant mt\leqslant\pi^2/2$. Поэтому для k возможны три значения $k_1=1$, $k_2=-1$, $k_3=0$.

Если $k=1$, то для определения каждой из переменных m или t, получаем квадратное уравнение

$$p^2-\pi p-\frac{\pi^2}{3}=0,$$

в котором p заменяет m или t. Решения этого уравнения имеют вид

$$p_{1,2}=\frac{\pi}{2}\left(1\pm\sqrt{\frac{7}{3}}\right).$$

Однако они не дают решений задачи, поскольку одно из них больше, чем π.

Если $k=-1$, то аналогичное уравнение имеет вид

$$p^2-\pi p+\frac{\pi^2}{3}=0.$$

Однако оно не имеет действительных решений.

Таким образом, $k=0$. В этом случае получаем

$$t=0, \qquad m=\pi.$$

Здесь учтено, конечно, что $-\pi/2\leqslant t\leqslant\pi/2$. Возвращаясь к переменным x и y, получаем

$$\arcsin x=0; \qquad x=0;$$

$$\arccos y=\pi; \qquad y=-1.$$

Ответ: $k=0$; $x=0$, $y=-1$.

Задача 4. На рис. 34 представлены «вид сверху» и «вид спереди» геометрических тел, о которых идет речь в задаче. Для того, чтобы найти объем конуса, нужно найти его высоту $KE=H$, или угол $EBK=(90°-2\alpha)$, так как

$$H=EB\cdot\operatorname{tg}(90°-2\alpha)=EB\cdot\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha},$$

где 2α — угол NBM, а $EB=R=1$ — радиус основания цилиндра.

Найдем сначала радиусы r четырех одинаковых шаров, лежащих на основании цилиндра. Очевидно, что $R=r+OO_1$, где OO_1 — расстояние от центра каждого шара до оси цилиндра. Имеем

$$r+r\sqrt{2}=R,$$

$$r=\frac{R}{1+\sqrt{2}}=\frac{1}{1+\sqrt{2}}.$$

Поскольку площадь боковой поверхности цилиндра известна, то его образующая BC определяется из следующих равенств:

$$2\pi R\cdot BC=\frac{10\pi}{1+\sqrt{2}},$$

$$BC=\frac{5}{R(1+\sqrt{2})}=\frac{5}{1+\sqrt{2}}.$$

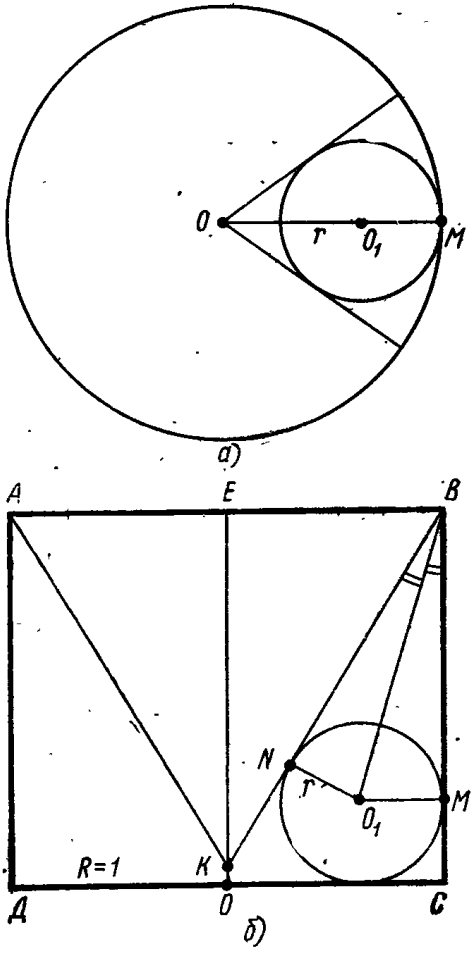


Рис. 34.

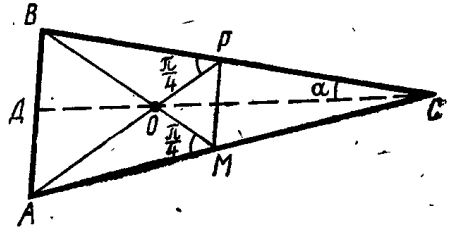


Рис. 35.

Затем определяется отрезок BM:

$$BM=BC-r=\frac{5}{1+\sqrt{2}}-\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\frac{4}{1+\sqrt{2}}.$$

Поскольку шар O_1 касается как образующей BC цилиндра, так и образующей BK конуса, то BO_1 — биссектриса угла NBM. Из пря-

моугольного треугольника BO_1M находим

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{O_1M}{BM}=\frac{r}{BM}=\frac{1}{4}.$$

Таким образом, определяется высота конуса H:

$$H=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1-1/16}{2\cdot 1/4}=\frac{15}{8}$$

и его объем V:

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot H=\frac{1}{3}\pi\cdot 1\cdot\frac{15}{8}=\frac{5\pi}{8}.$$

Ответ: $5\pi/8$ *см*^{3}.

Задача 5. Покажем, что $\triangle ABC$, рис. 35, равнобедренный. Поскольку площадь $\triangle BOP$ равна площади треугольника AOM, то равны площади треугольников ABM и ABP. Действительно, каждый из них составлен из $\triangle ABO$ и одного из треугольников AOM или BOP. Отсюда следует, что равны высоты треугольников ABP и ABM, поскольку они имеют общее основание AB. Значит, отрезок MP, соединяющий точки M и P, параллелен основанию AB.

Известно также, что $\angle APB=\angle BMA$. Поэтому вершины M и P треугольников APB и ABM лежат на одной и той же окружности, проходящей через точки A и B. Отсюда следует, что трапеция $ABPM$ вписана в эту окружность и, следовательно, является равнобочной; $AM=BP$, $\angle MAB=\angle PBA$. Значит, $\triangle ABC$ — равнобедренный.

Обозначим угол C через 2α. Тогда площадь $\triangle ABC$ определяется формулой

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot BC^2\cdot\sin 2\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha=\sin\alpha\cos\alpha.$$

Из прямоугольного треугольника BCD находим BD:

$$BD=BC\cdot\sin\alpha=\sin\alpha.$$

Из четырехугольника $OPCM$ найдем угол POM:

$$\angle POM=2\pi-2\alpha-\frac{3\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{2}-2\alpha.$$

Так как $\angle AOB=\angle POM$, то угол BOD определится равенством:

$$\angle BOD=\frac{1}{2}\angle POM=\frac{\pi}{4}-\alpha.$$

Из прямоугольного треугольника BOD находим:

$$\sin\angle BOD=\frac{BD}{BO}=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}/2},$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}/2},$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}/2},$$

$$\cos\alpha=3\sin\alpha$$

или $\operatorname{tg}\alpha = 1/3$. После этого можно вычислить $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{3}{\sqrt{10}},\quad \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{10}},$$

а затем и площадь треугольника ABC:

$$S_{ABC} = \sin\alpha\cos\alpha = \frac{3}{10}.$$

Ответ: 0,3 *см*^{2}.

§ 18. ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, ОТДЕЛЕНИЕ ОБЩЕЙ ГЕОЛОГИИ, 1975 г.

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$4\cos 4x + 6\sin^2 2x + 5\cos 2x = 0.$$

2. Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми равно 100 *км*, одновременно выехали два автобуса. Пройдя половину пути, первый автобус остановился, постоял 45 *мин* и поехал дальше со скоростью, на 10 *км/ч* меньшей, чем первоначальная. Второй автобус весь путь от А до В прошел с постоянной скоростью за 4 *ч*.

Найти первоначальную скорость первого автобуса, если он прибыл в пункт В на час раньше второго.

3. Решить неравенство

$$\log_{10}|2x+3|^3 + 2\log_{(2x+3)^2} 10 < 3.$$

4. В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 6$ *см*, $BC = 4$ *см*, $AC = 8$ *см*. Биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке D. Через точки A, D, C проведена окружность, пересекающая сторону BC в точке E. Найти площадь треугольника ADE.

5. Решить неравенство

$$\sqrt{x+5} < 1 + \sqrt{-x-3} + \sqrt{(x+5)(-x-3)}.$$

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$1 + 2\cos^2 x + 2\sqrt{2}\sin x + \cos 2x = 0.$$

2. В бассейн проведены две трубы: через первую трубу вода поступает, через вторую — вытекает из бассейна. Сначала, когда бассейн был пустым, были открыты обе трубы. Когда треть бассейна была заполнена водой, вторую трубу закрыли. Через пять часов после открытия труб бассейн был наполнен. Найти про-

пускную способность первой трубы, если объем бассейна равен 15 000 $м^3$, а пропускная способность второй трубы равна 2 000 $м^3/ч$.

3. Решить неравенство

$$2\log_{(3x+1)^2}10-3<\log_{\frac{1}{10}}|3x+1|^3.$$

4. В правильном треугольнике ABC проведена окружность, проходящая через центр треугольника и касающаяся стороны BC в ее середине D. Из точки A проведена прямая, касающаяся окружности в точке E так, что $\angle BAE<30°$. Найти площадь треугольника ABE, если площадь треугольника ABC равна $10/(4-\sqrt{2})$ $см^2$.

5. Решить неравенство

$$\sqrt{(x-3)(-x+5)}>-\sqrt{x-3}-1+\sqrt{-x+5}.$$

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$-2\sin^2x+1+\sin 4x=4\cos 2x.$$

2. Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми равно 40 $км$, одновременно отправились два туриста, первый пешком, а второй — на велосипеде. Когда второй турист обогнал первого на 5 $км$, первый сел на попутную машину, вследствие чего скорость его движения возросла в 4 раза. Через 2 $ч$ после отправления из пункта А первый турист догнал второго и прибыл в пункт В раньше его. Найти скорость туриста, ехавшего на велосипеде, если первый турист шел пешком со скоростью 6 $км/ч$.

3. Решить неравенство

$$3-2\log_{(x+4)^2}10>\log_{10}|x+4|^2.$$

4. В ромбе $ABCD$ со стороной $(1+\sqrt{5})$ $см$ и острым углом $BAD=60°$ расположена на окружность, вписанная в треугольник ABD. Из точки C к окружности проведена касательная, пересекающая сторону AB в точке E. Найти длину отрезка AE.

5. Решить неравенство

$$\sqrt{x+7}-1<\sqrt{-x-5}+\sqrt{(x+7)(-x-5)}.$$

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$\cos 4x+6=7\cos 2x.$$

2. Экскаватор роет котлован. После того, как было вынуто 20 $м^3$ грунта, производительность экскаватора снизилась на 5 $м^3/ч$.

Найти первоначальную производительность экскаватора, если через 8 *ч* после начала работы было вынуто 50 $м^3$ грунта.

3. Решить неравенство

$$2\log_{(2x-1)^2}10+\log_{10}|2x-1|^3<\log_2 8.$$

4. В равнобедренном треугольнике ABC известны стороны: $AC=4$ *см*, $AB=BC=6$ *см*. Биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке D. Через точку D проведена окружность, касающаяся стороны AC в ее середине и пересекающая отрезок AD в точке E. Найти площадь треугольника DEC.

5. Решить неравенство

$$\sqrt{(x-5)(-x+7)}+1>-\sqrt{x-5}+\sqrt{-x+7}.$$

Разбор варианта 1

Задача 1. Данное уравнение можно представить в следующем виде:

$$4(2\cos^2 2x-1)+6(1-\cos^2 2x)+5\cos 2x=0$$

и далее

$$2\cos^2 2x+5\cos 2x+2=0.$$

Решая это квадратное относительно $\cos 2x$ уравнение, находим:

1. $\cos 2x=-2$, действительных решений нет.

2. $\cos 2x=-\frac{1}{2}$, отсюда находим: $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$.

Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$, где $k=0, \pm 1, \pm 2 \ldots$.

Задача 2. Поскольку второй автобус весь путь от А до В прошел с постоянной скоростью за 4 *ч*, то его скорость равна 25 *км/ч*. Обозначим первоначальную скорость первого автобуса v. Из условия задачи следует, что $v>25$ *км/ч*. Первый автобус первую половину пути прошел за $50/v$ *ч*, а вторую — за $50/(v-10)$ *ч*. Тогда:

$$\frac{50}{v}+\frac{3}{4}+\frac{50}{v-10}=3.$$

Отсюда следует, что v удовлетворяет квадратному уравнению

$$9v^2-490v+2000=0,$$

которое имеет два корня $v_1=50$ и $v_2=40/9$. Учитывая, что $v>25$, заключаем, что скорость автобуса равна 50 *км/ч*.

Ответ: 50 *км/ч*.

Задача 3. Допустимые значения неизвестного в этой задаче определяются неравенствами

$$\begin{cases}(2x+3)^3>0,\\ 2x+3\neq 1,\end{cases}$$

откуда находим, что $-3/2<x<-1$ и $x>-1$.

Поскольку $2x+3>0$, то $|2x+3|=2x+3$. Заметив, что в области допустимых значений имеет место тождество

$$\log_{10}(2x+3)^3=\frac{1}{\log_{(2x+3)^3}10},$$

запишем данное неравенство в следующем виде:

$$\log_{10}(2x+3)^3+\frac{2}{\log_{10}(2x+3)^3}<3.$$

Обозначив $\log_{10}(2x+3)^3$ буквой t, получаем неравенство

$$t+\frac{2}{t}<3$$

или

$$\frac{t^2-3t+2}{t}<0.$$

Решения этого неравенства имеют вид

$$t<0; \qquad 1<t<2.$$

Определим теперь решения задачи. Рассмотрим два случая.

1. $t<0$; $\log_{10}(2x+3)^3<0$,

$$(2x+3)^3<1,$$

$$2x+3<1, \qquad x<-1.$$

Учитывая область допустимых значений, имеем: $-3/2<x<-1$.

2. $1<t<2$; $1<\log_{10}(2x+3)^3<2$,

$$10<(2x+3)^3<100,$$

$$\sqrt[3]{10}<2x+3<\sqrt[3]{100},$$

$$\sqrt[3]{10}-3<2x<\sqrt[3]{100}-3,$$

$$\frac{1}{2}[\sqrt[3]{10}-3]<x<\frac{1}{2}[\sqrt[3]{100}-3].$$

Очевидно, что полученные решения входят в число допустимых.

Ответ: $-\frac{3}{2}<x<-1$,

$$\frac{\sqrt[3]{10}-3}{2}<x<\frac{\sqrt[3]{100}-3}{2}.$$

Задача 4. Треугольник ABC, о котором идет речь в задаче, изображен на рис. 36. Легко показать, что треугольник ADE — равнобедренный, $AD=DE$. Действительно, угол ACD равен углу AED, поскольку они являются вписанными углами, опирающими-

ся на одну и ту же дугу окружности. По этой же причине равны между собой углы DAE и DCE. Если учесть теперь, что CD — это биссектриса угла ACB, то становится ясным, что угол DAE равен углу DEA и треугольник ADE—равнобедренный.

Сторона AD этого равнобедренного треугольника вычисляется из пропорции

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AC}{BC};\quad AD=4,$$

вытекающей из известного свойства биссектрисы внутреннего угла треугольника делить противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.

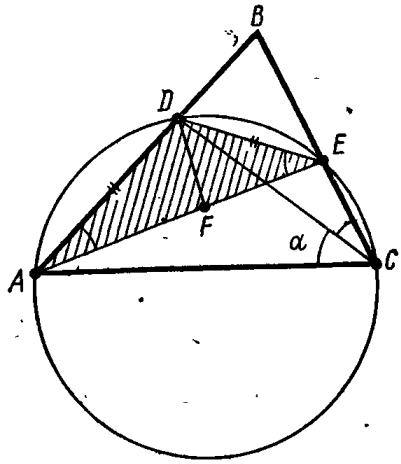


Рис. 36.

Обозначим угол при основании равнобедренного треугольника буквой α. Тогда угол ACB равен 2α. Его косинус легко находится по теореме косинусов из треугольника ABC:

$$AB^2=AC^2+BC^2-2\cdot AC\cdot BC\cdot\cos 2\alpha,$$

$$\cos 2\alpha=\frac{64+16-36}{64}=\frac{11}{16}.$$

Пусть DF — высота треугольника ADE. Тогда

$$DF=4\cdot\sin\alpha;\ AF=4\cdot\cos\alpha,$$

а площадь треугольника ADE равна

$$S_{ADE}=16\sin\alpha\cdot\cos\alpha=8\sin 2\alpha.$$

Зная, что $\cos 2\alpha=11/16$, нетрудно определить $\sin 2\alpha$:

$$\sin 2\alpha=\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}=\frac{\sqrt{135}}{16}.$$

После этого находим площадь искомого треугольника:

$$S_{ADE}=\frac{8\sqrt{35}}{16}=\frac{3\sqrt{15}}{2}.$$

Ответ: $3\sqrt{15}/2$ см^2.

Задача 5. Область допустимых значений в этом примере определяется системой неравенств:

$$\begin{cases} x+5\geqslant 0,\\ -x-3\geqslant 0,\end{cases}$$

откуда находим, что $-5\leqslant x\leqslant -3$.

Запишем исходное неравенство в следующем виде:

$$\sqrt{x+5}-\sqrt{-x-3}<1+\sqrt{(x+5)(-x-3)}.$$

Однако, прежде чем возвести обе части этого неравенства в квадрат, необходимо принять во внимание, что при этом не всегда получается неравенство, равносильное исходному. Возможны два варианта.

Рассмотрим *первый случай,* при котором левая часть этого неравенства меньше или равна нулю:

$$\sqrt{x+5}-\sqrt{-x-3}\leqslant 0. \qquad (1)$$

Поскольку правая часть рассматриваемого неравенства представляет собой сумму единицы и неотрицательного радикала, то очевидно, что она положительна. Поэтому все значения x, которые удовлетворяют неравенству (1), должны являться решениями задачи.

Имеем:

$$\sqrt{x+5}\leqslant\sqrt{-x-3}.$$

Обе части этого неравенства неотрицательны; поэтому оно равносильно следующему неравенству:

$$x+5\leqslant -x-3$$

или

$$x\leqslant -4.$$

Таким образом, найдена часть решений: $-5\leqslant x\leqslant -4$.

Рассмотрим *второй случай,* т. е. такие значения x, при которых

$$\sqrt{x+5}-\sqrt{-x-3}>0 \qquad (2)$$

или

$$-4<x\leqslant -3.$$

Имеем систему неравенств

$$\begin{cases} -4<x\leqslant -3, \\ \sqrt{x+5}-\sqrt{-x-3}<1+\sqrt{(x+5)(-x-3)}. \end{cases}$$

Теперь при возведении обеих частей неравенства в квадрат приходим к равносильной системе неравенств

$$\begin{cases} -4<x\leqslant -3, \\ 2-2\sqrt{(x+5)(-x-3)}<1+ \\ +(x+5)(-x-3)+2\sqrt{(x+5)(-x-3)}. \end{cases}$$

Решим второе неравенство системы. Обозначим

$$\sqrt{(x+5)(-x-3)}=t\geqslant 0.$$

Тогда имеем квадратное неравенство

$$2-2t<1+t^2+2t,$$

$$t^2+4t-1>0,$$

решения которого имеют вид

$$t>-2+\sqrt{5}.$$

Дальнейшее решение очевидно:

$$\sqrt{(x+5)(-x-3)}>\sqrt{5}-2,$$

$$(x+5)(-x-3)>9-4\sqrt{5},$$

$$x^2+8x+24-4\sqrt{5}<0,$$

$$-4-\sqrt{4\sqrt{5}-8}<x<-4+\sqrt{4\sqrt{5}-8}.$$

Нетрудно проверить, что

$$-4-\sqrt{4\sqrt{5}-8}<-4, \text{ а } -4+\sqrt{4\sqrt{5}-8}<-3.$$

Поэтому решения системы неравенств второго случая имеют вид:

$$-4<x<-4+\sqrt{4\sqrt{5}-8}.$$

Объединяя эти значения x с теми, которые были найдены ранее, получаем

$$-5\leqslant x<-4+\sqrt{4\sqrt{5}-8}.$$

Ответ: $-5\leqslant x<-4+\sqrt{4\sqrt{5}-8}$.

§ 19. ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, ОТДЕЛЕНИЕ ГЕОФИЗИКИ, 1975 г.

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$(x-1)^2+|x-1|-2=0.$$

2. Решить неравенство

$$\log_{9x^2-6x+1}\frac{1}{9x^2-18x+8}<-1.$$

3. Найти все решения системы

$$\begin{cases} 5^{\sin x+\operatorname{tg} y}=1, \\ 7^{\sin^2 x+\operatorname{tg}^2 y}=7, \end{cases}$$

удовлетворяющие условиям: $0<x<\pi$, $0<y<\pi$.

4. На отрезке AB длины R *см* как на диаметре построена окружность. Вторая окружность такого же радиуса, как и первая,

имеет центр в точке A. Третья окружность касается первой окружности внутренним образом, второй окружности — внешним образом, а также касается отрезка AB. Найти радиус третьей окружности.

5. Дан правильный тетраэдр $PABC$, длина ребра которого равна a *см*. Через точки C, E, M и P, где E — середина ребра AB, а M — середина ребра AC, проведена сфера. Найти радиус сферы.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$(x-2)^2-6=|x-2|.$$

2. Решить неравенство

$$\log_{4x^2-4x+1}(4x^2-12x+8)>\frac{1}{2}\log_2 4.$$

3. Найти все решения системы

$$\begin{cases} 3^{\sin x+\cos y}=1, \\ 25^{\sin^2 x+\cos^2 y}=5, \end{cases}$$

удовлетворяющие условиям: $0<x<\pi$, $0<y<\pi$.

4. Дан правильный треугольник ABC, сторона которого равна a *см*. Окружность проходит через центр треугольника и касается стороны BC в ее середине M. Прямая, проведенная из вершины A, касается окружности в точке E так, что $\angle BAE<30°$. Найти площадь треугольника AEM.

5. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ с нижним основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA', BB', CC' и DD'. Длина ребра куба равна $(4-2\sqrt{2})/(\sqrt{23}-\sqrt{2}-3)$ *см*. Первая сфера касается нижнего основания $ABCD$, боковой грани $BB'C'C$ и плоскости $AA'C'C$. Вторая сфера с центром в точке A' имеет радиус, вдвое больший, чем радиус первой сферы, и касается первой сферы внешним образом. Найти радиус первой сферы.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$(x+1)^2+2|x+1|=3.$$

2. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{9x^2+6x+1}}(9x^2-6x)<-1.$$

3. Найти все решения системы

$$\begin{cases} 6^{\sin x + \operatorname{ctg} y} = 1, \\ 6^{\sin^2 x + \operatorname{ctg}^2 y} = 3, \end{cases}$$

удовлетворяющие условиям: $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$.

4. На отрезке AB длины l *см* как на диаметре построена окружность. Вторая окружность, радиус которой равен половине радиуса первой окружности, касается ее внутренним образом в точке A. Третья окружность касается первой окружности внутренним образом, второй окружности — внешним образом, а также касается отрезка AB. Найти радиус третьей окружности.

5. Дана правильная четырехугольная пирамида $PABCD$ со стороной основания, равной a *см*. Высота пирамиды, опущенная из ее вершины P, также равна a *см*. Найти радиус сферы, проходящей через точки B, E, K и P, где E — середина ребра AD, а K — середина ребра BC.

Вариант 4

Решить уравнение

$$(x+2)^2 = 2|x+2| + 3.$$

Решить неравенство

$$-\frac{1}{4}\log_2 \frac{1}{16} < \log_{4x^2+4x+1}(4x^2 - 4x).$$

3. Найти все решения системы

$$\begin{cases} 2^{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y} = 1, \\ 2^{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 y} = 64, \end{cases}$$

удовлетворяющие условиям: $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$.

4. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием $AC = 6$ *см* и боковой стороной $AB = 5$ *см*. В треугольник ABD, где BD — высота треугольника ABC, вписана окружность. Прямая, проведенная через вершину C, касается окружности в точке E, причем $\angle ACE \neq 0$. Найти площадь треугольника OEC, где O — центр окружности.

5. В прямой призме $ABCA'B'C'$ с боковыми ребрами AA', BB' и CC' нижнее основание ABC является равнобедренным прямоугольным треугольником с гипотенузой BC. Сфера S_1 с радиусом $(\sqrt{23} - \sqrt{2} - 3)$ *см* касается боковых граней $AA'B'B$, $BB'C'C$ и нижнего основания ABC. Сфера S_2 с центром в точке C' касается

сферы S_1 внешним образом. Известно, что $AB=AA'$, и что радиус сферы S_1 в два раза меньше радиуса сферы S_2. Найти объем призмы.

Разбор варианта 1

Задача 1. Заметим, что

$$(x-1)^2=|x-1|^2.$$

Тогда данное уравнение можно рассматривать как квадратное относительно $t=|x-1|^2$:

$$t^2+t-2=0,$$

$$t_1=1, \qquad t_2=-2.$$

Имеем: 1. $|x-1|=1$; $x_1=2$, $x_2=0$.

2. $|x-1|=-2$; решений нет, поскольку $|x-1|\geqslant 0$ при всех значениях x.

Ответ: $x_1=2$, $x_2=0$.

Задача 2. Вспомним, что при решении логарифмических неравенств важно учитывать, больше или меньше, чем 1, основания у входящих в задачу логарифмов. В евязи с этим данное неравенство распадается на две системы неравенств:

$$1.\ \begin{cases} 9x^2-6x+1>1, \\ 0<\dfrac{1}{9x^2-18x+8}<\dfrac{1}{9x^2-6x+1}, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 9x^2-6x+1>1, \\ 9x^2-18x+8>9x^2-6x+1. \end{cases}$$

Здесь учтено, что выражение $(9x^2-18x+8)$ положительно в силу ОДЗ.

$$2.\ \begin{cases} 0<9x^2-6x+1<1, \\ \dfrac{1}{9x^2-18x+8}>\dfrac{1}{9x^2-6x+1}, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 0<9x^2-6x+1<1, \\ 9x^2-6x+1>9x^2-18x+8>0. \end{cases}$$

Здесь так же как и в предыдущем случае учтено, что выражения $(9x^2-18x+8)$ и $(9x^2-6x+1)$ положительны.

Рассмотрим первую систему неравенств. Из первого неравенства системы имеем:

$$x<0 \text{ или } x>\frac{2}{3}.$$

Из второго неравенства: $x\leq 7/12$. Объединяя решения этих неравенств, получим: $x<0$ $(7/12<2/3)$.

Рассмотрим вторую систему неравенств. Из первого неравенства системы имеем:

$$0<x<\frac{1}{3} \text{ или } \frac{1}{3}<x<\frac{2}{3}.$$

Из второго неравенства: $7/12<x<\frac{2}{3}$, $x>4/3$. Объединяя решения этих неравенств, получим: $7/12<x<2/3$.

Ответ: $x<0$, $7/12<x<2/3$.

Задача 3. Обозначим $\sin x=u$, $\operatorname{tg} y=v$. При этом заметим, что в силу условий задачи $u>0$. Имеем

$$\begin{cases} u+v=0, \\ u^2+v^2=1. \end{cases}$$

Отсюда находим

1. $u_1=-v_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

2. $u_2=-v_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Второе решение не удовлетворяет условию $u>0$; поэтому оно не рассматривается. Таким образом, остается система

$$\begin{cases} \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} y=-\frac{\sqrt{2}}{2}; \\ 0<x<\pi, \quad 0<y<\pi. \end{cases}$$

Условию $0<x<\pi$ удовлетворяют только два решения уравнения $\sin x=\sqrt{2}/2$ (рис. 37):

$$x_1=\frac{\pi}{4} \text{ и } x_2=\frac{3\pi}{4},$$

а условию $0<y<\pi$ — только одно решение уравнения $\operatorname{tg} y=-\sqrt{2}/2$:

$$y=\pi+\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Заметим, что арктангенс отрицательного числа определяет угол, заключенный в четвертой четверти, т. е.

$$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)<0.$$

Поэтому нужно правильно записать то решение уравнения $\operatorname{tg} y = -\sqrt{2}/2$, которое удовлетворяет условию $0 < y < \pi$.

Таким образом, задача имеет два решения.

Ответ: 1) $x = \frac{\pi}{4}$, $y = \pi + \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $x = \frac{3\pi}{4}$, $y = \pi + \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Задача 4. Чертеж к этой задаче представлен на рис. 38. Точки C и D являются центрами второй и третьей окружности соответственно; точка E служит основанием перпендикуляра, опущенного из центра третьей окружности на отрезок AB. Легко понять, что можно построить не одну, а две одинаковые окружности, удовлетворяющие всем условиям задачи, центры которых лежат внутри области $MCKBF$. Очевидно также, что точки C, D и F лежат на одной прямой. Аналогично, точки A, G и D лежат на одной прямой.

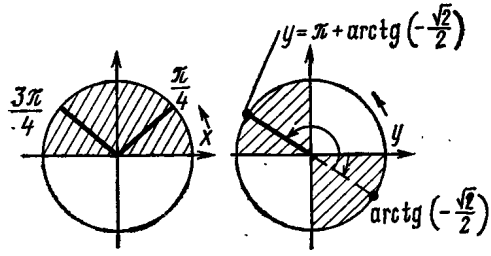


Рис. 37.

Обозначим радиус третьей окружности через x. Тогда $GD = DF = DE = x$; $AC = \frac{R}{2}$;

$$AD = \frac{R}{2} + x; \quad CD = \frac{R}{2} - x.$$

Угол DAE назовем α.

Из прямоугольного треугольника ADE находим

$$\sin\alpha = \frac{x}{\frac{R}{2} + x}. \tag{1}$$

По теореме косинусов, примененной к треугольнику ADC, имеем

$$CD^2 = AD^2 + AC^2 - 2 \cdot AD \cdot AC \cdot \cos\alpha,$$

$$\cos\alpha = \frac{AD^2 + AC^2 - CD^2}{2 \cdot AD \cdot AC}$$

или

$$\cos\alpha = \frac{\left(\frac{R}{2} + x\right)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 - \left(\frac{R}{2} - x\right)^2}{2 \cdot \left(\frac{R}{2} + x\right) \cdot \frac{R}{2}} = \frac{2x + \frac{R}{4}}{\frac{R}{2} + x}. \tag{2}$$

Складывая квадраты выражений (1) и (2), получим уравнение для определения x:

$$\left(\frac{x}{\frac{R}{2}+x}\right)^2+\left(\frac{2x+\frac{R}{4}}{\frac{R}{2}+x}\right)^2=1,$$

$$x^2+4x^2+Rx+\frac{R^2}{16}=\frac{R^2}{4}+Rx+x^2,$$

$$x=\frac{R\sqrt{3}}{8}.$$

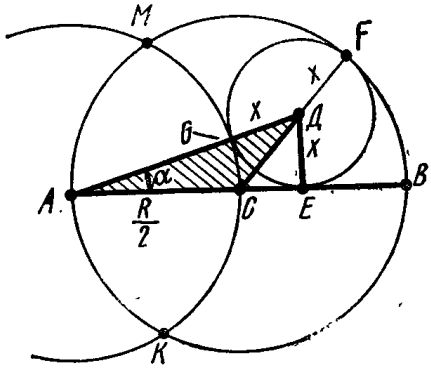


Рис. 38.

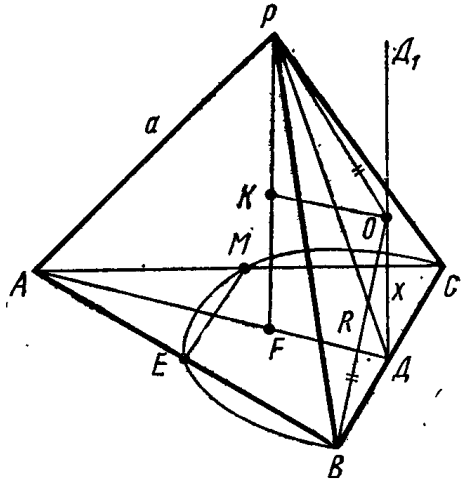


Рис. 39.

Ответ: радиус третьей окружности равен $R\sqrt{3}/8$.

Задача 5. Рассмотрим рис. 39. Построим центр искомой сферы, точку O. Поскольку эта точка должна быть равноудалена от точек C, E и M, то она лежит на перпендикуляре DD_1, восставленном к плоскости основания пирамиды ABC в точке D, центре окружности, проходящей через точки C, E и M, то есть окружности, описанной вокруг равнобочной трапеции $BEMC$. Легко понять, что BC является диаметром этой окружности, а $BE=EM=MC=a/2$ — три последовательные стороны правильного шестиугольника, вписанного в нее.

Найдем теперь на перпендикуляре DD_1 центр сферы O. Для этого обозначим неизвестное расстояние OD через x, соединим точки O и P, проведем отрезок прямой $OK\|AD$. Радиус сферы обозначим R.

Из прямоугольного треугольника OBD имеем

$$R^2=x^2+(a/2)^2. \qquad (1)$$

Из прямоугольного треугольника OKP имеем

$$R^2=OK^2+KP^2.$$

Если учесть, что

$$OK=DF=\frac{a\sqrt{3}}{6},\quad FP=a\sqrt{\frac{2}{3}},\quad KP=a\sqrt{\frac{2}{3}}-x,$$

то получим

$$R^2=\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(a\sqrt{\frac{2}{3}}-x\right)^2. \qquad (2)$$

Сравнивая между собой выражения (1) и (2), получим уравнение для определения x:

$$x^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(a\sqrt{\frac{2}{3}}-x\right)^2.$$

Отсюда находим

$$x=\frac{a\sqrt{6}}{8},$$

и далее по формуле (1) — радиус сферы R:

$$R^2=\left(\frac{a\sqrt{6}}{8}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2;\quad R=\frac{a\sqrt{22}}{8}.$$

Ответ: радиус сферы равен $a\sqrt{22}/8$ см.

§ 20. ХИМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, 1972 г.

Вариант 1

1. Пристань A расположена в 27 *км* от пристани B ниже по течению реки. От пристани A по направлению к пристани B отходит первая лодка, а через час после ее отхода навстречу ей от пристани B отходит вторая лодка. Лодки встречаются в 18 *км* от пристани B.

Если бы лодки отошли от пристаней A и B навстречу друг другу одновременно, то они встретились бы через два с четвертью часа. Найти скорость первой лодки в стоячей воде, если известно, что она вдвое больше скорости течения реки.

2. Решить уравнение

$$\log_{x^2+6x+8}[\log_{2x^2+2x+3}(x^2-2x)]=0.$$

3. В трапеции $ABCD$ углы A и D при основании AD соответственно равны 60° и 30°. Точка N лежит на основании BC, причем $BN:NC=2$. Точка M лежит на основании AD, прямая MN перпендикулярна основаниям трапеции и делит ее площадь пополам.

Найти отношение $AM:MD$.

4. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ служит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом в вершине B. Ребро SA перпендикулярно плоскости треугольника ABC. Через середины D и E соответственно ребер AC и BC проведена плоскость, параллельная ребру SC и образующая в сечении четырехугольник $DEFH$ (точка F лежит на ребре SB).

Найти площадь четырехугольника $DEFH$, если известно, что $BC=a$, $AC=b$, $SA=h$.

5. Найти все значения x, для которых выражение

$$(\sin 4x+\sin 2x)\,(3\cos^2 x+2\sin 2x-6\cos x)$$

положительно.

Вариант 2

1. От пристани А одновременно отходят вниз по течению реки к пристани В две лодки. Первая лодка подходит к пристани В на два часа раньше второй.

Если бы лодки отошли от этих пристаней одновременно, двигаясь навстречу друг другу (первая лодка отходит от пристани А), то они встретились бы через три часа. Расстояние между пристанями равно 24 *км*. Скорость второй лодки в стоячей воде в три раза больше скорости течения реки.

Найти скорость течения реки.

2. Решить уравнение

$$\log_{x^2-6x+8}[\log_{2x^2-2x+3}(x^2+2x)]=0.$$

3. В треугольнике ABC угол A равен 45°, а угол C — острый. Из середины стороны BC опущен перпендикуляр NM на сторону AC. Площади треугольников NMC и ABC относятся соответственно как 1 : 8. Найти углы треугольника ABC.

4. В прямую призму $ABCDA'B'C'D'$, нижним основанием которой является ромб $ABCD$, а AA', BB', CC', DD' — боковые ребра, вписан шар радиуса R. Найти площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины A, B, C', если известно, что $\angle BAD=\alpha$.

5. Найти все значения x, для которых выражение

$$(\cos x-\cos 5x)\,(2\sin x+3\cos x+4)$$

положительно.

Вариант 3

1. Из двух расположенных на реке пунктов А и В (В по течению ниже А), расстояние между которыми равно 36 *км*, одновременно выходят навстречу друг другу две лодки (первая лодка выходит из пункта А) и встречаются через три часа после выхода.

Скорость второй лодки в стоячей воде в четыре раза больше скорости течения реки. Расстояние от пункта A до пункта B и обратно первая лодка проходит за 24 *ч*.

Найти скорость течения реки.

2. Решить уравнение

$$\log_{x^2-2x+2}[\log_{2x^2-12x+16}(x^2+5x)]=0.$$

3. В трапеции $ABCD$ углы A и D при основании соответственно равны 60° и 90°. Точка N лежит на основании BC, причем $BN:BC=2:3$. Точка M лежит на основании AD, прямая MN параллельна боковой стороне AB и делит площадь трапеции пополам. Найти отношение $AB:BC$.

4. В треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина, ABC — основание пирамиды) на стороне AC взята точка E так, что $BC=3\cdot CE$. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки D и E параллельно ребру SC, если известно, что $SA=SB$, $SC=a$, $AC=BC=b$, $\angle ACB=\alpha$.

5. Найти все значения x, при которых выражение

$$(\cos x\sin 2x-\sin x)(4\sin x+2\cos x+5)$$

отрицательно.

Вариант 4

1. От расположенного на реке пункта A вверх по течению отходит первая лодка, а через два с половиной часа из пункта A выходит вторая лодка и догоняет первую в тридцати километрах от пункта A. После этого обе лодки поворачивают и идут обратно, причем первая лодка приходит в пункт A через 3 *ч*, а вторая — через 2,5 *ч*, считая с того момента, когда вторая лодка догнала первую. Найти скорость течения реки.

Примечание: время, необходимое на поворот лодок, считается равным нулю.

2. Решить уравнение

$$\log_{x^2-2x+2}[\log_{2x^2+x+2}(x^2+4x)]=0.$$

3. В треугольнике ABC угол C равен 30°, а угол A — острый. Перпендикулярно стороне BC проведена прямая, отсекающая от треугольника ABC треугольник CNM (точка N лежит между вершинами B и C). Площади треугольников CNM и ABC относятся соответственно как 3 : 16. Длина отрезка NM равна половине длины высоты BH треугольника ABC. Найти отношение $AH:HC$.

4. Найти площадь сечения куба $ABCDA'B'C'D'$ ($ABCD$ — нижнее основание, AA', BB', CC', DD' — боковые ребра куба) плоскостью, проходящей через вершину A и середины ребер $B'C'$ и $D'C'$. Ребро куба равно a.

5. Найти все значения x, для которых выражение

$$(\cos x - \sin x \sin 2x)(3\sin x - \cos x - 4)$$

отрицательно.

Разбор варианта 1

Задача 1. Обозначим через v_1, v_2 — скорости лодок, а через u — скорость течения реки. Тогда

$$v_1 = 2u.$$

Из второго условия задачи следует уравнение

$$\frac{27}{v_1 + v_2} = \frac{9}{4}.$$

Первое условие задачи можно записать в виде уравнения

$$\frac{17 - (v_1 - u)}{v_1 + v_2}(v_2 + u) = 18.$$

Здесь отношение $[27 - (v_1 - u)]/(v_1 + v_2)$ определяет время до встречи лодок друг с другом, отсчитываемое от момента выхода второй лодки.

Исключая величины v_1 и v_2 из третьего уравнения с помощью двух первых, находим:

$$u^2 - 39u + 108 = 0,$$

1) $u_1 = 36$ *км/ч*.

2) $u_2 = 3$ *км/ч*.

Первое решение не подходит, так как тогда $v_1 = 2u = 72$, а из второго уравнения следует, что $v_1 + v_2 = 12$ $(v_2 > 0)$. Итак, $u = 3$ *км/ч*.

Ответ: $v_1 = 6$ *км/ч*.

Задача 2. Это уравнение можно было бы решать путем обычной процедуры, начиная с исследования области допустимых значений. Однако, в данном случае проще найти значения x, среди которых заключены решения уравнения, а затем посредством проверки отбросить те из найденных значений x, которые не удовлетворяют ограничениям ОДЗ.

Действительно, если

$$\log_{x^2+6x+8}[\log_{2x^2+2x+3}(x^2 - 2x)] = 0,$$

то

$$\log_{2x^2+2x+3}(x^2 - 2x) = 1,$$

и далее

$$x^2 - 2x = 2x^2 + 2x + 3.$$

Отсюда находим: 1) $x = -1$, 2) $x = -3$.

Непосредственной подстановкой найденных значений неизвестного в исходное уравнение убеждаемся, что решением задачи служит только одно из них: $x=-1$.

Ответ: $x=-1$.

Задача 3. Чертеж к этой задаче представлен на рис. 40. Обозначим $BN=2x$, $NC=x$ и $MN=h$. Тогда

$$AM=\frac{h}{\sqrt{3}}+2x;\quad MD=h\sqrt{3}+x.$$

Из равенства площадей трапеций $ABNM$ и $DMNC$ находим:

$$\frac{2x+\left(\frac{h}{\sqrt{3}}+2x\right)}{2}\cdot h=\frac{x+(h\sqrt{3}+x)}{2}\cdot h$$

и далее

$$x=\frac{\sqrt{3}}{3}h.$$

После этого получаем:

$$\frac{AM}{MD}=\frac{\frac{h}{\sqrt{3}}+2x}{h\sqrt{3}+x}=\frac{3}{4}.$$

Ответ: $AM:MD=3:4$.

Задача 4. На рис. 41 изображен чертеж к этой задаче. Сечение, о котором идет речь, строится следующим образом: в плоскости ASC проводится средняя линия DH, а в плоскости треугольника BCS — средняя линия EF. Четырехугольник $DEFH$ представляет собой параллелограмм.

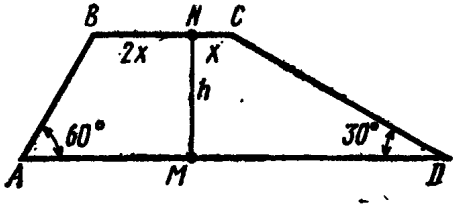


Рис. 40.

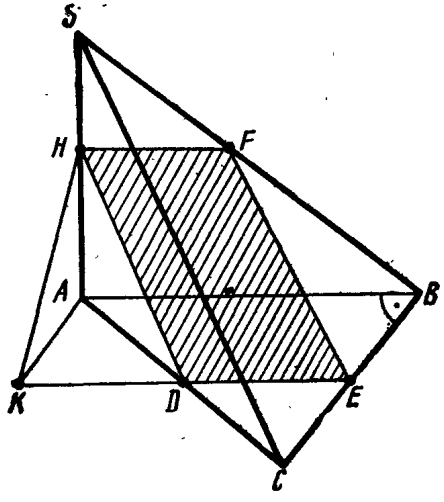


Рис. 41.

Он и является искомым сечением. Поскольку $DH\|SC\|EF$ — так как плоскость $DEFH\|SC$; $HF\|DE\|AB$ — как средние линии соответствующих треугольников ABS и ABC. Находим

$$DE=\frac{1}{2}\sqrt{b^2-a^2}.$$

Определим высоту параллелограмма $DEFH$. Для этой цели из точки H опустим перпендикуляр HK на линию DE и соединим точку K с точкой A. По теореме о трех перпендикулярах $AK \perp KE$ и, значит, $AK \parallel BC$, так как по условию задачи угол B — прямой, $DE \parallel AB$ и $KE \perp BC$.

$$HK = \sqrt{AH^2 + AK^2} = \sqrt{\frac{h^2}{4} + \frac{a^2}{4}}.$$

Тогда площадь сечения находится в виде произведения DE и HK:

$$\frac{1}{4}\sqrt{b^2 - a^2} \cdot \sqrt{h^2 + a^2}.$$

Ответ: $\frac{1}{4}\sqrt{(b^2 - a^2)(h^2 + a^2)}$, $b > a$.

Задача 5. Решим неравенство

$$(\sin 4x + \sin 2x)(3\cos^2 x + 2\sin 2x - 6\cos x) > 0.$$

Представим его в виде:

$$(\sin 4x + \sin 2x)\cos x(3\cos x + 4\sin x - 6) > 0.$$

Легко заметить, что выражение $(3\cos x + 4\sin x - 6)$ всегда отрицательно. Действительно, вспоминая преобразование, называемое «введением вспомогательного аргумента»

$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2 + B^2}\sin(\varphi + x),$$

где

$$\sin\varphi = A/\sqrt{A^2 + B^2}, \quad \cos\varphi = B/\sqrt{A^2 + B^2},$$

можно заметить, что при всех значениях x

$$-\sqrt{A^2 + B^2} \leqslant A\cos x + B\sin x \leqslant \sqrt{A^2 + B^2}.$$

В частности,

$$-5 \leqslant 3\cos x + 4\sin x \leqslant 5.$$

Поэтому

$$3\cos x + 4\sin x - 6 < 0.$$

Итак, решим неравенство

$$(\sin 4x + \sin 2x)\cos x < 0,$$

или

$$2\sin 3x\cos^2 x < 0.$$

Это неравенство эквивалентно системе

$$\begin{cases} \sin 3x < 0, \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$$

Решения первого неравенства имеют вид

$$-\pi + 2\pi k < 3x < 2\pi k, \quad \text{где } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

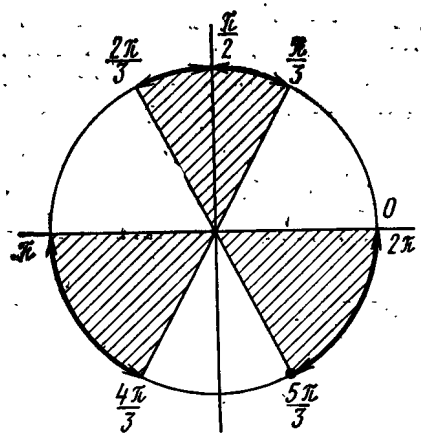


Рис. 42.

или

$$-\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}k<x<\frac{2\pi}{3}k.$$

На рис. 42 углы, соответствующие полученному неравенству, заштрихованы. Из заштрихованных областей необходимо отбросить углы, соответствующие ограничению $\cos x\neq 0$, т. е. углы

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi m,$$

где $m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Ответ:

$$-\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}k<x<\frac{2\pi}{3}k, \quad x\neq\frac{\pi}{2}+\pi m.$$

Замечание. Те же области можно записать и так:

1) $\frac{\pi}{3}+2\pi k<x<\frac{\pi}{2}+2\pi k$,

2) $\frac{\pi}{2}+2\pi k<x<\frac{2\pi}{3}+2\pi k$,

3) $\pi+2\pi k<x<\frac{4\pi}{3}+2\pi k$,

4) $\frac{5\pi}{3}+2\pi k<x<2\pi+2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

§ 21. ХИМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, 1973 г.

Вариант 1

1. Алик, Боря и Вася покупали трехкопеечные карандаши и блокноты. Алик купил 4 карандаша и 2 блокнота, Боря — 6 карандашей и блокнот, Вася — 3 карандаша и блокнот. Оказалось, что суммы, которые уплатили Алик, Боря и Вася образуют геометрическую прогрессию.

Сколько стоит блокнот?

2. Решить неравенство

$$\log_4(5-3^x)\log_2\left(\frac{5-3^x}{8}\right)\geqslant -1.$$

3. Найти все действительные x, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{\sin^2 x}{\sin x+1}}.$$

4. В правильной четырехугольной пирамиде расположен шар радиуса 2. Этот шар касается боковых граней пирамиды и внешним образом касается полушара, опирающегося на круг, вписанный в основание пирамиды. Точка касания шара и полушара отстоит от основания пирамиды на расстояние, равное одной трети высоты пирамиды.

Найти объем пирамиды и величину двугранного угла при боковом ребре пирамиды.

5. В прямоугольный треугольник ABC вписан квадрат $AEKM$ так, что K лежит на гипотенузе, а E и M — на катетах. Сторона этого квадрата относится к радиусу круга, вписанного в треугольник ABC, как $(2+\sqrt{2}) : 2$.

Найти углы треугольника.

Вариант 2

1. Объем воды, находящейся во втором из трех баков, равен среднему геометрическому объемов воды в первом и третьем баках. Из третьего бака перелили один ковш воды в первый бак и два ковша — во второй, после чего в первом баке стало 11 *л*, во втором — 16 *л* и в третьем — 10 *л* воды.

Найти объем ковша.

2. Решить неравенство

$$\log_{16}(18-2^x)\log_4\left(\frac{18-2^x}{32}\right) > -\frac{1}{2}.$$

3. Найти все действительные x, удовлетворяющие уравнению

$$\log_{3-x^2}\left(\frac{3\sin 2x - 2\cos x}{\sin 2x \cdot \sin x}\right) = \log_{3-x^2} 2.$$

4. В правильной треугольной пирамиде расположены два шара Q_1 и Q_2. Шар Q_1 вписан в пирамиду; шар Q_2 касается внешним образом шара Q_1 и боковых граней пирамиды. Радиус шара Q_1 равен 3, радиус шара Q_2 равен 2.

Найти объем пирамиды и величину двугранного угла, образованного боковыми гранями пирамиды.

5. В прямоугольный треугольник ABC вписан квадрат так, что две вершины его лежат на гипотенузе, а две другие на катетах. Радиус круга, описанного около треугольника ABC, относится к стороне квадрата как 13 : 6.

Найти углы треугольника.

Вариант 3

1. Трое рабочих обрабатывали одинаковые детали. К концу месяца оказалось, что количество деталей, обработанных первым, вторым и третьим рабочими, образует геометрическую прогрессию.

Месячный заработок каждого рабочего складывается из части, пропорциональной количеству обработанных деталей, и премии. У первого рабочего он составил 150 рублей, у второго — 180 рублей, а у третьего — 250 рублей.

Найти размеры премий, если известно, что у первого и второго рабочих они одинаковы, а у третьего — в полтора раза больше.

2. Решить неравенство

$$\log_4 (3^x - 1) \log_{1/4} \left(\frac{3^x - 1}{16}\right) \leqslant \frac{3}{4}.$$

3. Найти все действительные x, удовлетворяющие уравнению

$$(4 - x^2)^{-\frac{\cos^2 x}{\cos x + 1}} = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

4. В правильной треугольной пирамиде расположен шар радиуса 1. В точке, делящей пополам высоту пирамиды, он касается внешним образом полушара. Полушар опирается на круг, вписанный в основание пирамиды; шар касается боковых граней пирамиды.

Найти площадь боковой поверхности пирамиды и величину двугранного угла, образованного боковыми гранями пирамиды.

5. В равнобедренный треугольник ABC вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании BC, а две другие — на боковых сторонах треугольника. Сторона квадрата относится к радиусу круга, вписанного в треугольник, как 8 : 5.

Найти углы треугольника.

Вариант 4

1. Три автомобиля едут по шоссе. Первый и третий удаляются от пункта А, второй едет навстречу им. В полдень расстояния первого, второго и третьего автомобилей до А были равны соответственно 60 *км*, 270 *км*, 210 *км*, а через час второй автомобиль оказался между первым и третьим и при этом расстояние от него до А стало средним геометрическим из расстояний первого и третьего автомобилей до того же пункта.

Чему равна скорость автомобилей, если известно, что у первого и третьего автомобилей она одинакова, а у второго — в полтора раза больше?

2. Решить неравенство

$$\log_3 \frac{2^x-5}{27} \log_{1/3}(2^x-5) < 2.$$

3. Найти все действительные x, удовлетворяющие уравнению

$$\log_{5-x^2}\left(\frac{3\sin 2x - 2\sin x}{\sin 2x \cos x}\right) = \log_{5-x^2} 2.$$

4. В правильной четырехугольной пирамиде расположены два шара Q_1 и Q_2. Шар Q_1 вписан в пирамиду и имеет радиус 2, шар Q_2 касается внешним образом шара Q_1 и боковых граней пирамиды. Радиус шара Q_2 равен 1.

Найти площадь боковой поверхности пирамиды и величину двугранного угла при боковом ребре пирамиды.

5. В прямоугольный треугольник ABC вписан прямоугольник $DEKM$ вдвое меньшей площади. Вершины D и E лежат на гипотенузе BC, вершины K и M — на катетах.

Найти углы треугольника ABC, если сторона DE прямоугольника относится к стороне DM как 5 : 2.

Разбор варианта 1

Задача 1. Обозначим стоимость блокнота — x *коп.* Тогда Алик уплатил $(2x+12)$ *коп*, Боря — $(x+18)$ *коп*, Вася — $(x+9)$ *коп*. Поскольку числа $(2x+12)$, $(x+18)$, $(x+9)$ образуют геометрическую прогрессию, то

$$(x+18)^2 = (2x+12)(x+9).$$

Отсюда получаем уравнение

$$x^2 - 6x - 216 = 0.$$

Положительный корень этого уравнения дает ответ задачи: $x = 18$.

Ответ: $x = 18$.

Задача 2. Решим неравенство

$$\log_4(5-3^x)\log_2\left(\frac{5-3^x}{8}\right) \geqslant -1.$$

Обозначим $\log_2(5-3^x)$ буквой t. Тогда получаем

$$\frac{1}{2}t(t-3) \geqslant -1$$

или

$$t^2 - 3t + 2 \geqslant 0.$$

Решение неравенства $t \geqslant 2$ и $t \leqslant 1$. В первом случае

$$\log_3(5-3^x) \geqslant 2,$$
$$(5-3^x) \geqslant 4,$$
$$3^x \leqslant 1,$$
$$x \leqslant 0.$$

Во втором случае

$$\log_3(5-3^x) \leqslant 1,$$
$$0 < 5-3^x \leqslant 2,$$
$$3 \leqslant 3^x < 5,$$
$$1 \leqslant x < \log_3 5.$$

Ответ: 1) $x \leqslant 0$; 2) $1 \leqslant x < \log_3 5$.

Задача 3. Решим уравнение

$$(1-x^2)^{-1/2} = (1-x^2)^{-\frac{\sin^2 x}{\sin x+1}}.$$

Его ОДЗ: $-1 < x < 1$. Если $1-x^2 \neq 1$, т. е. $x \neq 0$, то

$$-\frac{1}{2} = -\frac{\sin^2 x}{\sin x+1},$$
$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0.$$

1) $\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$;

2) $\sin x = -\frac{1}{2}$, $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$.

Легко проверить, что из всех найденных решений условию $-1 < x < 1$ удовлетворяет только одно $x = -\pi/6$. Отметим, что забыть об ОДЗ — значит совершить грубую ошибку.

Рассмотрим оставшийся случай $x = 0$. (Этот случай часто упускался поступающими.) Легко видеть, что при этом x уравнение удовлетворяется. Значит, число 0 есть решение уравнения.

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = -\pi/6$.

Задача 4. Обратимся к рис. 43, на котором представлен чертеж рассматриваемой задачи. Поскольку шар касается всех боковых граней пирамиды, то его центр, точка O, лежит на высоте SF. Проведем в плоскости боковой грани ASB пирамиды $SABCD$ апофему SL и соединим точку L с центром основания, точкой E. Рассмотрим отдельно плоскость $\triangle ESL$, перпендикулярную боковой грани ASB. Если из точки O опустить перпендикуляр OM на SL, то это будет радиус шара, равный 2.

Очевидно, что $\triangle OMS \sim \triangle LES$. Обозначая радиус полушария через $x/2$ (x — сторона основания пирамиды), составим пропорцию

$$\frac{2}{x/2} = \frac{SO}{SL}.$$

Обозначим высоту пирамиды буквой h. Из условия задачи следует, что

$$\frac{h}{3}=\frac{x}{2}, \quad h=\frac{3}{2}x.$$

Кроме того ясно, что

$$SO=\frac{2}{3}h-2=x-2,$$

$$SL=\sqrt{LE^2+SE^2}=\sqrt{\frac{x^2}{4}+h^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}x.$$

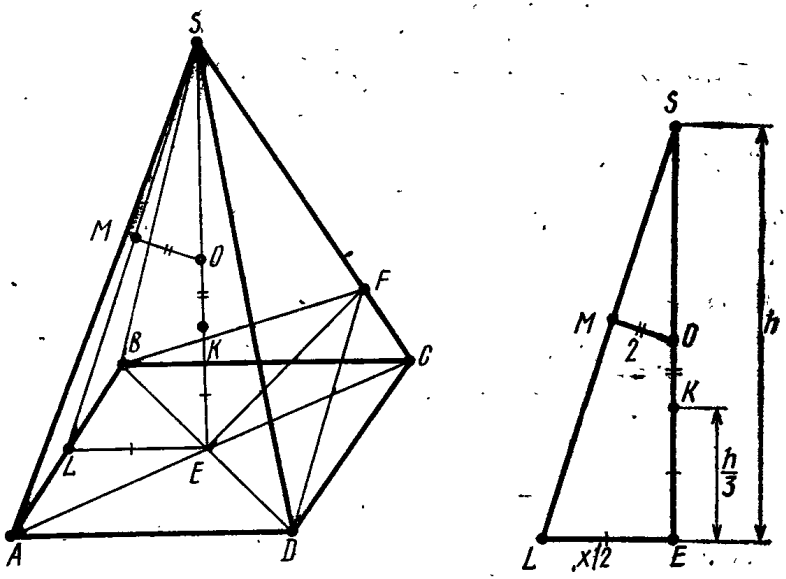


Рис. 43.

Получаем уравнение

$$\frac{2}{x/2}=\frac{x-2}{\sqrt{10}\,x/2},$$

решение которого определяет сторону основания

$$x=2(1+\sqrt{10}).$$

Высота пирамиды равна соответственно

$$h=3(1+\sqrt{10}),$$

а объем пирамиды

$$V=\frac{1}{3}x^2h=4(1+\sqrt{10})^2.$$

Найдем теперь двугранный угол φ между боковыми гранями пирамиды. Из точек B и D опустим перпендикуляры на ребро пи-

рамиды SC, которые пересекутся, очевидно, в одной точке F. Угол BFD — искомый. Этот угол проще всего определить из рассмотрения прямоугольного треугольника BEF (EF — биссектриса угла BFD). В этом треугольнике

$$BE=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}x\sqrt{2}=\sqrt{2}\,(1+\sqrt{10}).$$

Гипотенуза треугольника BF представляет собой высоту боковой грани пирамиды и, значит, равна удвоенной площади этой грани, деленной на длину бокового ребра.

Площадь боковой грани вычисляется так:

$$\frac{1}{2}AB\cdot SL=\frac{1}{2}x\cdot\frac{\sqrt{10}}{2}x=\frac{\sqrt{10}}{4}x^2=\sqrt{10}\,(1+\sqrt{10})^2.$$

Боковое ребро SC равно

$$SC=\sqrt{h^2+\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{11}\,(1+\sqrt{10}).$$

Таким образом,

$$BF=\frac{2\sqrt{10}\,(1+\sqrt{10})^2}{\sqrt{11}\,(1+\sqrt{10})}=2\sqrt{\frac{10}{11}}\,(1+\sqrt{10})$$

и далее

$$\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{BE}{BF}=\sqrt{\frac{11}{20}},\quad \varphi=2\arcsin\sqrt{\frac{11}{20}}.$$

Ответ: $V=4(\sqrt{10}+1)^2$; $\varphi=2\arcsin\sqrt{\frac{11}{20}}$.

Задача 5. Пусть ABC — прямоугольный треугольник (рис. 44), BC — гипотенуза, AC и AB — катеты. Обозначим угол B треугольника x, а гипотенузу — a. Тогда

$$AC=a\sin x,\qquad AB=a\cos x\,(0<x<\pi/2).$$

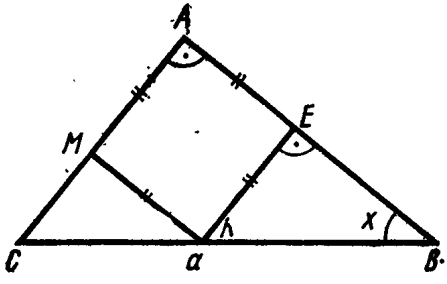


Рис. 44.

Вычислим радиус окружности, вписанной в треугольник ABC. Для этого воспользуемся формулой площади треугольника

$$S=\frac{p\cdot r}{2},$$

где r — радиус вписанной окружности, p — периметр треугольника. Приравнивая это выражение площади треугольника, записанной

через катеты, получим

$$a^2\sin x\cdot\cos x=a(1+\sin x+\cos x)r,$$

откуда

$$r=a\,\frac{\sin x\cos x}{1+\sin x+\cos x}.$$

Рассмотрим теперь подобные треугольники BEK и BAC. Составляя пропорцию из соответствующих сторон треугольников

$$\frac{KE}{a\sin x}=\frac{a\cos x-KE}{a\cos x}$$

найдем сторону квадрата KE:

$$KE=a\,\frac{\sin x\cos x}{\cos x+\sin x}.$$

Составляя отношение стороны квадрата, вписанного в треугольник, и данной окружности, получим тригонометрическое уравнение для нахождения угла треугольника:

$$\frac{KE}{r}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1+\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x},\quad\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2},$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1,$$

$$x=\frac{\pi}{4}.$$

Отсюда следует, что треугольник ABC равнобедренный.

Ответ: 45° и 45°.

§ 22. ХИМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, 1974 г.

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\sqrt{1+\sqrt{\cos 2x}}+\sqrt{1-\sqrt{\cos 2x}}=\sqrt{1+\sqrt{\sin x}}+\sqrt{1-\sqrt{\sin x}}.$$

2. Верно ли, что всякое решение неравенства $\log_3(5x^2-21x+7)>1$ будет решением неравенства

$$\log_3(x^2-4x+2)>0?$$

3. В прямоугольном треугольнике ABC с острым углом A, равным 30°, проведена биссектриса BD другого острого угла B. Найти расстояние между центрами двух окружностей, вписанных в треугольники ABD и DBC, если длина меньшего катета равна 1.

4. К двум бассейнам подведены две трубы разного диаметра (к каждому бассейну своя труба). Через первую трубу налили

в 1-й бассейн определенный объем воды и сразу после этого во 2-й бассейн через 2-ю трубу налили такой же объем воды, причем на все это вместе ушло 16 *ч*. Если бы через 1-ю трубу вода текла столько времени, сколько через 2-ю, а через 2-ю — столько времени, сколько через 1-ю, то через 1-ю трубу налилось бы воды на 320 $м^3$ меньше, чем через 2-ю. Если бы через 1-ю трубу проходило бы на 10 $м^3/ч$ меньше, а через 2-ю — на 10 $м^3/ч$ больше воды, то, чтобы налить в бассейны (сначала в первый, а потом во второй) первоначальные объемы воды, ушло бы 20 *ч*.

Сколько времени лилась вода через каждую из труб?

5. В основании четырехугольной пирамиды лежит ромб со стороной a и острым углом α. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей ромба и равна четверти его меньшей диагонали. Найти радиус шара, который лежит на основании пирамиды, касаясь основания в точке пересечения диагоналей ромба и плоскости, проведенной через вершину пирамиды и середины смежных сторон основания, составляющих угол α.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\sqrt{1+\sqrt{\sin 2x}}+\sqrt{1-\sqrt{\sin 2x}}=\sqrt{1+\sqrt{\cos x}}+\sqrt{1-\sqrt{\cos x}}.$$

2. Верно ли, что всякое решение неравенства $\log_2(8+8x-5x^2)>2$ будет решением неравенства $\log_2(2+2x-x^2)>0$?

3. В прямоугольном треугольнике ABC с катетами 3 и 4 вершина C прямого угла соединена с серединой D гипотенузы AB. Найти расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD.

4. 24 школьника разбились на две группы. Первая из них пошла в цирк, а вторая — в кино. При этом оказалось, что на цирк и кино было затрачено одинаковое количество денег. Если бы билет в цирк стоил на 20 копеек дешевле, а билет в кино — на 20 копеек дороже, то, истратив на билеты в цирк и на билеты в кино те же суммы денег, в цирк и в кино смогли бы пойти вместе 15 школьников. Если бы при прежней стоимости билетов вторая группа школьников пошла в цирк, а первая группа — в кино, то на билеты в цирк ушло бы на 19 руб 20 коп больше, чем на билеты в кино.

Сколько стоили билеты в цирк и в кино?

5. На основании правильной треугольной пирамиды с высотой H и радиусом круга, вписанного в основание, равным r, лежит шар, касающийся основания в его центре. Найти радиус шара, если плоскость, проведенная через вершину пирамиды и середины двух сторон основания, касается этого шара.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$\sqrt{1+\sqrt{\operatorname{ctg} 2x}}+\sqrt{1-\sqrt{-\operatorname{ctg} x}}=\sqrt{1-\sqrt{\operatorname{ctg} 2x}}+\sqrt{1+\sqrt{-\operatorname{ctg} x}}.$$

2. Верно ли, что всякое решение неравенства

$\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4x+6)<-2$ будет решением неравенства

$$\log_{\frac{1}{2}}(3x^2-14x+9)<0?$$

3. В прямоугольном треугольнике ABC с острым углом 30° проведена высота CD из вершины прямого угла C. Найти расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, если меньший катет треугольника ABC равен 1.

4. Две хозяйки затратили одинаковое количество денег на покупки. Первая купила картошку, а вторая—яблоки, причем картошки было куплено на 8 *кг* больше, чем яблок. Если бы яблоки и картошка стоили дороже на 10 *коп* за килограмм, то в этом случае первая хозяйка купила бы картошки на 3 *кг* больше, чем вторая — яблок. Если бы при первоначальной стоимости первая хозяйка купила столько килограмм яблок, сколько у нее оказалось картошки, а вторая купила бы столько картошки, сколько у нее оказалось яблок, то первой пришлось бы истратить на 3 руб 20 коп больше, чем второй. Сколько стоили килограмм яблок и килограмм картошки?

5. На основании правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания a и двугранным углом при основании α лежит шар, касающийся основания в его центре. Плоскость, проходящая через вершину пирамиды и середины двух смежных сторон основания, касается этого шара. Найти его радиус.

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$\sqrt{1+\sqrt{\operatorname{tg} 2x}}+\sqrt{1-\sqrt{3\operatorname{tg} x}}=\sqrt{1-\sqrt{\operatorname{tg} 2x}}+\sqrt{1+\sqrt{3\operatorname{tg} x}}.$$

2. Верно ли, что всякое решение неравенства $\log_{\frac{1}{3}}(5-2x-x^2)<-1$ будет решением неравенства

$$\log_{\frac{1}{3}}(8-3x-2x^2)<-1?$$

3. В прямоугольном треугольнике ABC с катетами 3 и 4 проведена высота CD из вершины C прямого угла. Найти расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD.

4. Школьник купил в магазине несколько тетрадей и карандашей, причем все тетради стоили столько же, сколько все карандаши, а тетрадей было на три штуки больше, чем карандашей. Если бы при этом один карандаш стоил на 10 коп дороже, а одна тетрадь тоже стоила на 10 коп. дороже, то, истратив те же деньги как на тетради, так и на карандаши, что и раньше, можно было бы купить тетрадей на одну больше, чем карандашей. Если бы школьник купил по первоначальной стоимости тетрадей столько, сколько было куплено карандашей, а карандашей столько, сколько было куплено тетрадей, то за карандаши пришлось бы уплатить на 90 коп. больше, чем за тетради. Сколько стоит один карандаш и одна тетрадь?

5. Шар лежит на основании прямого кругового конуса, касаясь основания в его центре. Плоскость, образующая угол β с высотой конуса, касается шара и отсекает на окружности основания дугу с острым центральным углом α. Найти радиус шара, если радиус окружности основания равен R.

Разбор варианта 1

Задача 1. Необходимо потребовать, чтобы $\sin x \geqslant 0$ и $\cos 2x \geqslant 0$. Тогда возведение обеих частей этого уравнения в квадрат приводит к равносильному уравнению

$$\sqrt{1-\cos 2x} = \sqrt{1-\sin x}.$$

Поскольку обе части этого уравнения неотрицательны, то повторная операция «возведения в квадрат» дает еще одну форму равносильного уравнения

$$\cos 2x = \sin x$$

или

$$1-2\sin^2 x = \sin x,$$

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0,$$

решения которого имеют вид

1. $\sin x = -1$; $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

2. $\sin x = \frac{1}{2}$; $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$.

Однако условиям $\sin x \geqslant 0$, $\cos 2x \geqslant 0$ удовлетворяют не все из этих решений. Легко проверить, что ответами в задаче могут служить только числа

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{и} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n.$$

Ответ: $x = \pi/6 + 2\pi n$, $x = 5\pi/6 + 2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$.

Задача 2. Решим каждое из данных неравенств.

1. $\log_3(5x^2-21x+7)>1$,
$5x^2-21x+7>3$,
$5x^2-21x+4>0$,
$x<\frac{1}{5}$; $x>4$.

2. $\log_3(x^2-4x+2)>0$,
$x^2-4x+2>1$,
$x^2-4x+1>0$,
$x<2-\sqrt{3}$; $x>2+\sqrt{3}$.

Теперь становится очевидным, что всякое решение первого неравенства будет решением и второго неравенства. Если рассматривать $x>4$, то ясно, что все такие числа будут больше, чем $2+\sqrt{3}$, т. е. будут служить решениями второго неравенства. То же самое можно сказать и о числах $x<1/5$. Очевидно, что все они удовлетворяют второму неравенству, поскольку будут меньше, чем $2-\sqrt{3}$. Ведь ясно, что $1/5<2-\sqrt{3}$.

Ответ: верно.

Задача 3. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, вписанных в ΔDBC и ΔABD соответственно, рис. 45. Расстояние O_1O_2 между этими точками найдем из прямоугольного треугольника $O_1O_2O_3$, где O_3 — проекция точки O_1 на радиус O_2M_2 окружности O_2, проведенный из ее центра в точку M_2 касания со стороной AC треугольника:

$$O_1O_2=\sqrt{O_2O_3^2+O_1O_3^2}.$$

Найдем стороны O_2O_3 и O_1O_3.

Вычислим сначала радиусы окружностей r_1 и r_2. Для этого используем формулу

$$r=S/p,$$

где S — площадь треугольника, а p — его полупериметр.

Известно, что $BC=1$, угол A равен 30°. Тогда $AB=2$, а $AC=\sqrt{3}$. Поскольку биссектриса BD делит сторону AC на части, пропорциональные сторонам BC и AB, то

$$CD=\frac{\sqrt{3}}{1+2}\cdot 1=\frac{\sqrt{3}}{3};\quad AD=\frac{\sqrt{3}}{1+2}\cdot 2=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Далее из ΔDBC легко находится гипотенуза BD:

$$BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Отсюда, в частности, следует, что $BD=AD$ и ΔABD — равнобедренный. Поэтому $AM_2=AN_2=1$. Здесь N_2 — точка касания окружности O_2 со стороной AB.

Находим радиус r_1:

$$r_1 = \frac{S_{DBC}}{p_1} = \frac{1/2 \cdot BC \cdot CD}{p_1} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}/3}{1 + \sqrt{3}/3 + 2\sqrt{3}/3} = \frac{1}{3 + \sqrt{3}}.$$

Находим радиус r_2:

$$r_2 = \frac{S_{ABD}}{p_2} = \frac{1/2 \cdot AB \cdot DN_2}{p_2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}/3}{2 + 4\sqrt{3}/3} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}.$$

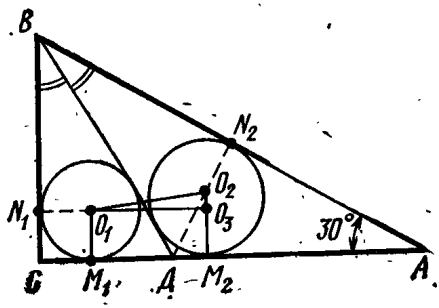


Рис. 45.

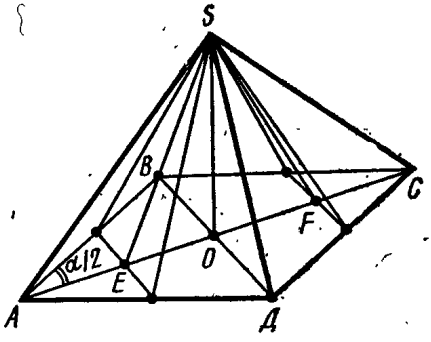


Рис. 46.

Определяем O_2O_3:

$$O_2O_3 = r_2 - r_1 = \frac{1}{(3 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}.$$

Определяем O_1O_3:

$$O_1O_3 = AC - AM_2 - CM_1 = \sqrt{3} - 1 - \frac{1}{3 + \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 3}.$$

Вычисляем O_1O_2:

$$O_1O_2 = \sqrt{\left[\frac{1}{(3 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}\right]^2 + \left[\frac{2\sqrt{3} - 1}{3 + \sqrt{3}}\right]^2} = \frac{1}{3}\sqrt{96 - 54\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\sqrt{96 - 54\sqrt{3}}/3$.

Задача 4. Пусть u_1 — пропускная способность первой трубы, а u_2 — пропускная способность второй трубы. V — объем, который заполняет каждая из труб в том случае, когда на весь этот процесс затрачивается 16 часов. Имеем уравнение

$$\frac{V}{u_1} + \frac{V}{u_2} = 16. \qquad (1)$$

Если бы через первую трубу вода текла столько времени, сколько через вторую, а через вторую — столько времени, сколько через первую, то через 1-ю трубу налилось бы воды на 320 $м^3$

меньше, чем через 2-ю. Этому условию задачи соответствует уравнение

$$u_2 \cdot \frac{V}{u_1} - u_1 \cdot \frac{V}{u_2} = 320. \qquad (2)$$

Последнее условие задачи приводит к уравнению

$$\frac{V}{u_1 - 10} + \frac{V}{u_2 + 10} = 20. \qquad (3)$$

Имеем систему трех уравнений:

$$\begin{cases} V(u_1 + u_2) = 16 \cdot u_1 u_2, \\ V(u_1 + u_2)(u_2 - u_1) = 320 u_1 u_2, \\ V(u_1 + u_2) = 20(u_1 - 10)(u_2 + 10), \end{cases}$$

решения которой таковы:

$$u_1 = 30;\ u_2 = 50,\ V = 300.$$

Отсюда находим искомые продолжительности:

$$t_1 = \frac{300}{30} = 10 \quad \text{и} \quad t_2 = \frac{300}{50} = 6.$$

Ответ: 10 часов, 6 часов.

Задача 5. Рисунок к задаче изображен на чертеже 46. Очевидно, что радиус R шара равен радиусу вписанной в треугольник ESF окружности, где E и F — середины отрезков AO и OC соответственно. Тогда

$$R = S_{\triangle ESF} / p_{\triangle ESF},$$

где $S_{\triangle ESF}$ и $p_{\triangle ESF}$ — площадь и полупериметр треугольника ESF. Имеем:

$$S_{\triangle ESF} = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot OS = \frac{a}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a^2}{8} \sin\alpha.$$

$$p_{\triangle ESF} = \frac{1}{2}(EF + 2 \cdot SF) = \frac{1}{2} a \cos\frac{\alpha}{2} +$$

$$+ \sqrt{\frac{a^2}{4}\cos^2\frac{\alpha}{2} + \frac{a^2}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2}\left(1 + \cos\frac{\alpha}{2}\right).$$

Ответ: $R = a \sin\alpha / 4(1 + \cos\alpha/2)$.

§ 23. ХИМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, 1975 г.

Вариант 1

1. Решить неравенство

$$5^{2x-10-3\sqrt{x-2}} - 4 \cdot 5^{x-5} < 5^{1+3\sqrt{x-2}}.$$

2. На второй остановке в автобус вошло на двенадцать человек больше, чем вышло на третьей остановке, а на третьей вошло на три человека меньше, чем вышло на четвертой. Вошло на четвер-

той вдвое больше, чем на второй. На четвертую остановку приехало на тринадцать человек больше, чем уехало с первой. Что больше и на сколько, число человек, вошедших на второй остановке, или число человек, вышедших на второй остановке?

Известно, что если бы на второй остановке вышло вдвое больше человек, чем вошло на третьей, то с четвертой остановки уехало бы на девять человек больше, чем с первой.

3. В треугольнике ABC сторона $BC=5$. Окружность проходит через вершины B и C и пересекает сторону AC в точке K так, что $CK=3$, $KA=1$. Известно, что косинус угла ACB равен 4/5. Найти отношение радиуса данной окружности к радиусу окружности, вписанной в треугольник ABK.

4. В треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина, треугольник ABC — основание пирамиды) грань SAC перпендикулярна грани ABC. Кроме того, $SA=SC=1$, а угол при вершине B треугольника ABC — прямой. Шар касается плоскости основания пирамиды в точке B, а грани SAC — в точке S. Найти радиус шара.

5. Найти все значения параметра b, при которых система

$$\begin{cases}\cos(y-b)-2\cos x=0,\\ \log_2(by-y^2)=2\log_4(-x)-\log_{\frac{1}{2}}(3y)\end{cases}$$

имеет нечетное число решений.

Вариант 2

1. Решить неравенство

$$3^{3x-2\sqrt{x+1}}-7\cdot 3^{2x}<18\cdot 3^{x+2\sqrt{x+1}}.$$

2. В хоккейном матче, состоящем из трех периодов, команда А победила команду В с перевесом в две шайбы, причем ни одна из команд не забила шайб в свои ворота. В первом периоде команда А забила столько же шайб, сколько пропустила она в свои ворота во втором периоде, а в третьем периоде эта же команда забила на одну шайбу меньше, чем в первом. В первом периоде команда А пропустила вдвое больше шайб, чем в третьем. Что больше и на сколько, число шайб, забитых командой А во втором периоде, или число шайб, забитых командой В в третьем периоде?

Известно, что если бы команда А забила во втором периоде столько же шайб, сколько она забила в первом, то она выиграла бы первые два периода с перевесом в пять шайб.

3. В треугольнике ABC косинус угла BAC равен 1/2, $AB=2$, $AC=3$. Точка D лежит на продолжении стороны AC так, что C находится между A и D, $CD=3$. Найти отношение радиуса окружности, описанной около треугольника ABC, к радиусу окружности, вписанной в треугольник ABD.

4. В треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина, треугольник ABC — основание пирамиды) углы SAB и SAC прямые. Шар касается плоскости треугольника ABC в точке A и боковых ребер SB и SC в их серединах. Найти радиус шара, если $BC=a$ и угол BAC равен β.

5. Найти все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} \sin(a-y)+2\sin x=0, \\ 2\log_{\frac{1}{4}}(a-y)+4\log_{\frac{1}{4}} y=\log_2\left(\frac{\sqrt{3}}{y^2}\right)+3\log_{\frac{1}{4}} x \end{cases}$$

имеет четное число решений.

Вариант 3

1. Решить неравенство

$$4^{\frac{3x}{2}}+2^{x-\sqrt{x}}<3\cdot 2^{1-x-2\sqrt{x}}.$$

2. В понедельник в библиотеке было выдано на сорок книг больше, чем во вторник, а во вторник было сдано книг вдвое меньше, чем в среду. В среду было выдано на двенадцать книг меньше, чем во вторник. За эти три дня было выдано столько же книг, сколько сдано. Что больше и на сколько, число книг, выданных в среду, или число книг, сданных в понедельник?

Известно, что если бы в понедельник было сдано столько же книг, сколько сдано во вторник, то за понедельник и среду было бы выдано на двадцать семь книг больше, чем сдано (за понедельник и среду).

3. В треугольнике BCD косинус угла BCD равен $3/4$, $BC=4$, $CD=8$. Точка A лежит на стороне CD данного треугольника так, что $CA=2$. Найти отношение площади круга, описанного около треугольника BCD к площади круга, вписанного в треугольник ABD.

4. Дана пирамида $SABC$ (S — вершина, треугольник ABC — основание пирамиды), в которой ребро AC перпендикулярно грани SAB. Шар касается грани ASC в точке S, а грани ABC — в точке B. Найти радиус шара, если $AC=1$, $\angle ACB=\angle BCS=60^\circ$.

5. Найти все значения параметра b, при которых система

$$\begin{cases} \cos(b-y)-3\cos x=0, \\ 2\log_3(by-y^2)=\log_3(3x)-\log_{\frac{1}{3}} y. \end{cases}$$

имеет нечетное число решений.

Вариант 4

1. Решить неравенство

$$9^{\frac{3x}{2}+\sqrt{x}} < 8\cdot 3^{2x+3\sqrt{x}} + 3^{x+4\sqrt{x}+2}.$$

2. Две шахты соревновались в течение первого квартала. Мартовская добыча второй шахты была на четыреста тонн меньше февральской добычи первой шахты. Январская добыча первой шахты равнялась ее же мартовской добыче и равнялась февральской добыче второй шахты. По итогам первых двух месяцев добыча первой шахты оказалась меньше, чем добыча второй шахты на одну тысячу тонн. Что больше и на сколько, январская добыча первой шахты или январская добыча второй шахты?

Известно, что если бы январская добыча второй шахты равнялась ее же мартовской добыче, то добыча второй шахты за январь, февраль, март месяцы оказалась бы больше добычи первой шахты за эти же месяцы на одну тысячу триста тонн.

3. В треугольнике ABC косинус угла ACB равен $2/3$, $AC=3$, $BC=9$. Точка D лежит на стороне BC так, что $CD=3$. Найти отношение площади круга, описанного около треугольника ACD, к площади круга, вписанного в треугольник ABD.

4. Шар радиуса R касается всех боковых граней треугольной пирамиды в серединах сторон ее основания. Отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром шара, делится пополам точкой пересечения с основанием пирамиды. Найти объем пирамиды.

5. Найти все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} \sin(3a-3y)+3\sin x=0, \\ 2\log_4(a-y)+2\log_4(2\sqrt{y})=\log_2\sqrt{y}+3\log_8(2x) \end{cases}$$

имеет четное число решений.

Разбор варианта 1

Задача 1. Заметим, что обозначив

$$5^{x-5}=p>0, \quad 5^{3\sqrt{x-2}}=q>0,$$

данное неравенство можно записать весьма просто:

$$\frac{p^2}{q}-4p<5q.$$

Учитывая, что $q>0$, получаем квадратное неравенство

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2-4\left(\frac{p}{q}\right)-5<0,$$

откуда находим

$$-1<\frac{p}{q}<5.$$

Поскольку отношение p/q положительно, имеем

$$0<\frac{p}{q}<5,$$

или

$$5^{x-5-3\sqrt{x-2}}<5,$$

$$x-5-3\sqrt{x-2}<1,$$

$$x-6<3\sqrt{x-2}.$$

Согласно общим правилам решения иррациональных неравенств рассмотрим два случая:

а) $2\leqslant x<6$; в этом случае $x-6<0$, $3\sqrt{x-2}\geqslant 0$.

Поэтому неравенство выполнено и все x от 2 до 6 служат его решениями.

б) $x\geqslant 6$; в этом случае обе части неравенства неотрицательны и при возведении их в квадрат получается неравенство, равносильное исходному:

$$\begin{cases} x\geqslant 6 \\ x-6<3\sqrt{x-2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 6, \\ (x-6)^2<9(x-2) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x\geqslant 6 \\ x^2-21x+54<0. \end{cases}$$

Решения этой системы имеют вид: $6\leqslant x<18$.

Объединяя решения обоих случаев, получаем решение задачи.

Ответ: $2\leqslant x<18$.

Задача 2. Обозначим количество человек вошедших и вышедших на 2-, 3- и 4-й остановках соответственно через m_1 и m_2, n_1 и n_2, p_1 и p_2. Тогда условие задачи приводит к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} m_1&=n_2+12, \\ n_1&=p_2-3, \\ p_1&=2m_1. \end{aligned} \qquad (1)$$

Кроме того, условие о том, что на четвертую остановку приехало на 13 человек больше, чем уехало с первой, можно записать следующим образом:

$$(m_1+n_1)-(m_2+n_2)=13. \qquad (2)$$

Понятно, что это число определяется разностью между числом пассажиров, вошедших на второй и третьей остановках, и числом пассажиров, вышедших на этих остановках.

Наконец, последнее уравнение задачи определяется из условия, что при $m_2=2n_1$ разность между числом пассажиров, вошедших на трех остановках и вышедших на них, равна 9:

$$(m_1+n_1+p_1)-(2n_1+n_2+p_2)=9. \qquad (3)$$

Своеобразие настоящей задачи заключается в том, что из полученной системы нельзя определить все шесть неизвестных величин m_1, m_2, n_1, n_2, p_1 и p_2, но можно найти искомую разность (m_1-m_2). Для этой цели сложим два первых уравнения системы (1) и вычтем их сумму из уравнения (2). Получим выражение для p_2:

$$p_2=m_2+4.$$

Поэтому на основании равенств (1) можно написать

$$n_1=p_2-3=m_2+1,$$
$$n_2=m_1-12,$$
$$p_1=2m_1,$$
$$p_2=m_2+4,$$

т. е. неизвестные n_1, n_2, p_1 и p_2 выразить через m_1 и m_2. Подставляя последние выражения в уравнение (3), находим:

$$[m_1+(m_2+1)+2m_1]-[2(m_2+1)+(m_1-12)+(m_2+4)]=9,$$
$$m_1-m_2=1,$$

т. е. определяем искомую разность. Конечно, найти такую разность удалось только благодаря специальному заданию чисел в условии задачи.

Ответ: на второй остановке число вошедших пассажиров превосходит число вышедших на 1.

Задача 3. Чертеж к этой задаче представлен на рис. 47. Соединим точки B и K отрезком прямой. Тогда окружность, проходящая через точки B, C и K, будет описанной вокруг треугольника BCK. Обозначим радиус этой окружности через R, угол BCK — через α, радиус окружности, вписанной в треугольник ABK — r, полупериметр треугольника ABK — p. Для нахождения радиусов R и r используем известные формулы:

$$S_{ABK}=p\cdot r=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BC\cdot\sin\alpha-\frac{1}{2}\cdot KC\cdot BC\cdot\sin\alpha;\ 2R=\frac{BK}{\sin\alpha}.$$

Вычисления производим в следующем порядке.

1. Найдем сторону AB треугольника ABC по теореме косинусов:

$$AB^2=AC^2+BC^2-2\cdot AC\cdot BC\cdot\cos\alpha,$$

$$AB^2=16+25-2\cdot 4\cdot 5\cdot 4/5=9;$$

$$AB=3.$$

(Так как $BC=5$, $AC=4$ и $AB=3$, то $\triangle ABC$ — прямоугольный.)

2. Из треугольника ABK находим:

$$KB^2=AK^2+AB^2;\quad KB=\sqrt{1^2+3^2},$$

$$KB=\sqrt{10}.$$

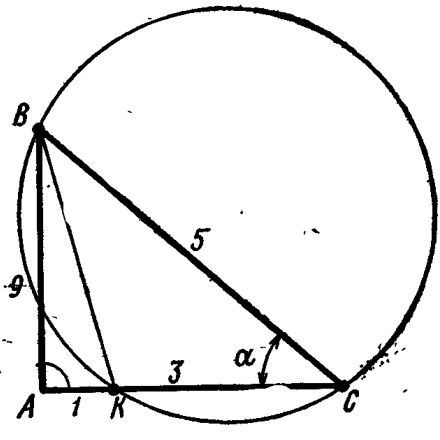


Рис. 47.

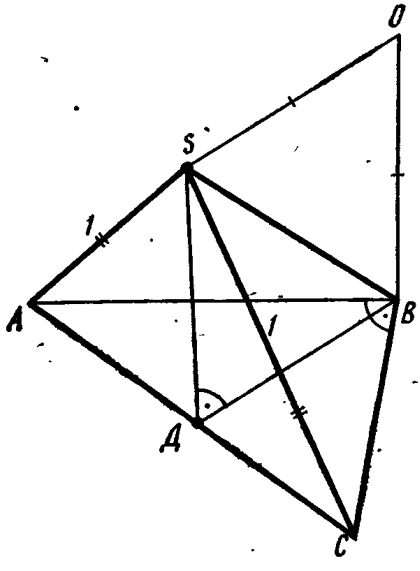


Рис. 48.

3. Вычислим площадь треугольника ABK:

$$S_{ABK}=\frac{1}{2}AB\cdot AK,$$

$$S_{ABK}=1{,}5.$$

4. Найдем радиус окружности, вписанной в треугольник ABK:

$$r=\frac{S_{ABK}}{p}=\frac{1{,}5}{(3+1+\sqrt{10})/2}=\frac{3}{4+\sqrt{10}}.$$

5. Вычислим радиус окружности, описанной вокруг треугольника BCK, используя для этого теорему синусов:

$$2R=\frac{BK}{\sin\alpha};\quad 2R=\frac{\sqrt{10}}{3/5};\quad R=\frac{5\sqrt{10}}{6}.$$

Тогда искомое отношение радиусов окружностей равно:

$$\frac{R}{r}=\frac{5\sqrt{10}}{6}:\ \frac{3}{4+\sqrt{10}}=\frac{5(5+2\sqrt{10})}{9}.$$

Ответ: $[5(5+2\sqrt{10})/9.]$

Задача 4. Чертеж к этой задаче представлен на рис. 48. Центр шара, о котором идет речь в задаче, находится на пересечении двух перпендикуляров. Один из них восставлен к плоскости основания в точке B, а другой — к плоскости треугольника ASC в точке S. Обозначим центр шара через O. Если из точки S опустить перпендикуляр SD на плоскость основания пирамиды ABC, то точка D будет лежать на ребре AC, поскольку плоскость ASC перпендикулярна плоскости ABC. Соединив точки D и B отрезком прямой, получим четырехугольник $BOSD$, который является квадратом. Действительно, $OB\|SD$ и $OS\|BD$, т. е. рассматриваемая фигура — параллелограмм. Учитывая, что угол OBD — прямой и что $OS=OB=R$, получим, что эта фигура — квадрат.

Поскольку SD — высота равнобедренного треугольника ASC, то точка D — середина ребра AC. Отсюда следует, что прямоугольный треугольник ABC — равнобедренный. Тогда $BD=CD$. Таким образом, имеем

$$SD=BD=CD=R.$$

Из прямоугольного треугольника SDC, в котором гипотенуза SC равна 1, находим, что $R=\sqrt{2}/2$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Задача 5. Прежде всего отметим, что допустимые x и y должны удовлетворять следующим условиям

$$x<0,\ y>0.$$

Второе уравнение системы можно преобразовать в этом случае **к виду**

$$\log_2(by-y^2)=\log_2(-3xy),$$

или

$$by-y^2=-3xy.$$

Очевидно, что все допустимые значения x и y, удовлетворяющие этому уравнению, удовлетворяют также и условию:

$$by-y^2>0.$$

Далее это уравнение можно упростить, разделив обе его части на y $(y>0)$:

$$b-y=-3x. \qquad (1)$$

Подставим этот результат в первое уравнение системы:

$$\cos 3x=2\cos x.$$

Используя формулу косинуса утроенного аргумента, получим:

$$4\cos^3 x - 3\cos x = 2\cos x,$$

$$\cos^2 x = \frac{5}{4}\cos x.$$

1. $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$.

2. $\cos^2 x = \frac{5}{4}$, решений нет.

Учитывая, что $x < 0$, получим, что $n < 0$, т. е. $n = -1, -2, -3, \ldots$. Подставим найденные значения x в выражение (1) для y

$$y = b + \frac{3\pi}{2} + 3\pi n$$

и учтем, что $y > 0$. Очевидно, что при целых $n < 0$ это возможно только в том случае, если $b > 0$. Подберем теперь значения b таким образом, чтобы система уравнений имела нечетное число решений.

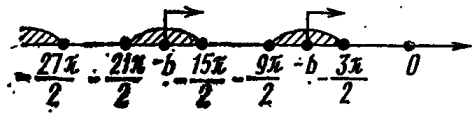


Рис. 49.

На рис. 49 изображены числа $\frac{3\pi}{2} + 3\pi n$, где $n = -1, -2, \ldots$.

Если положительные значения параметра b выбирать согласно одному из условий

$$\frac{3\pi}{2} < b < \frac{9\pi}{2},$$

или

$$\frac{15\pi}{2} < b < \frac{21\pi}{2},$$

или

$$\frac{27\pi}{2} < b < \frac{33\pi}{2}$$

вообще

$$\frac{3\pi}{2} + 6\pi m < b < \frac{9\pi}{2} + 6\pi m, \text{ где } m = 0, 1, 2, 3 \ldots,$$

то в каждом случае найдется только нечетное количество целых отрицательных чисел n, при которых $y > 0$, т. е. система будет иметь нечетное количество решений.

Ответ: $\frac{3\pi}{2} + 6\pi m < b < \frac{9\pi}{2} + 6\pi m$, где $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

§ 24. ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, 1972 г.

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\sin 3x - \sin x + \cos 2x = 1.$$

2. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{10}} x^2 + \log^2_{\frac{1}{10}} x < 2.$$

3. В двух сосудах имеется вода разной температуры. Из этой воды составляют смеси. Если отношение объемов воды, взятой из первого и второго сосудов, равно 1 : 3, то температура смеси 49°, а если 2 : 5, то температура смеси 48°. Найти температуру воды в каждом сосуде, считая, что плотность и удельная теплоемкость воды не зависят от температуры.

4. На сфере, радиус которой равен 2 *м*, расположены три окружности радиуса 1 *м*, каждая из которых касается двух других. Найти радиус окружности, меньшей, чем данные, которая также расположена на данной сфере и касается каждой из данных окружностей.

5. В треугольнике ABC угол B равен $\pi/4$, угол C равен $\pi/3$. На медианах BM и CN как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках P и Q. Хорда PQ пересекает среднюю линию MN в точке F. Найти отношение длины отрезка NF к длине отрезка FM.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x = 4 \sin x.$$

2. Решить неравенство

$$\log_3 (3^{4x} - 3^{2x+1} + 3) < 2 \log_9 7.$$

3. Два автомобиля выезжают одновременно навстречу друг другу. Первый — из пункта А, второй — из пункта В. К моменту встречи первый автомобиль проехал расстояние в 1,4 раза большее, чем второй. Если скорость первого автомобиля увеличить на 21 *км/ч*, то они встретятся в пункте C таком, что $AC = 2CB$. Найти скорости автомобилей.

4. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$; при этом $AA' \| BB' \| CC' \| DD'$. Ребро куба равно a, E — середина ребра $A'D'$, точка F — середина ребра AA'. Найти радиус меньшей из двух сфер, проходящих через точки E и F и касающихся граней двугранного угла, образованного плоскостями $BB'C'C$ и $DD'C'C$.

5. В трапеции $ABCD$ основание AD вдвое больше основания BC, угол A равен $\pi/4$, угол D равен $\pi/3$. На диагоналях трапеции как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках M и N. Хорда MN пересекает основание AD в точке E. Найти отношение длины отрезка AE к длине отрезка ED.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$\cos 3x \sin x + 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1.$$

2. Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{10}} \sqrt{x^3} \cdot \log_{10}(100x) < 3 \log_{10} x.$$

3. Имеются два слитка сплавов золота и меди. В первом слитке отношение золота к меди 1 : 2, а во втором — 2 : 3. Если сплавить 1/3 первого слитка с 5/6 второго, то в получившемся слитке окажется столько золота, сколько было в первом меди, а если 2/3 первого слитка сплавить с половиной второго, то в получившемся слитке окажется меди на 1 *кг* больше, чем было золота во втором слитке. Сколько золота в каждом слитке?

4. На сфере, радиус которой равен 4 *м*, расположены три окружности радиуса 2 *м*, каждая из которых касается двух других. Найти радиус окружности, большей, чем данные, которая также расположена на данной сфере и касается каждой из данных окружностей.

5. В треугольнике ABC угол B равен $\pi/4$, угол C равен $\pi/6$. На медианах BM и CN как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках P и Q. Хорда PQ пересекает сторону BC в точке D. Найти отношение длины отрезка BD к длине отрезка DC.

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$\cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{x}{2} = 3(1 + \cos x).$$

2. Решить неравенство

$$\log_2(2^{4x} + 2^{2x}) < 2\log_4 12.$$

3. Из пункта A вниз по течению реки отправляется катер, который движется относительно берегов со скоростью 10 *км/ч*. Навстречу ему из пункта B в тот же момент отправляется лодка. Ка-

тер и лодка встречаются между пунктами A и B в такой точке C, что AC=5·CB. Если бы катер отправился из пункта B, а лодка — из пункта A, то они встретились бы в такой точке D, что AD=DB. Найти скорости катера и лодки в стоячей воде.

4. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$; при этом $AA' \| BB' \| CC' \| DD'$. Ребро куба равно a. Точка E — середина ребра AA'. На продолжении ребра DA взята точка F. Точка A лежит между F и D; $2FA=AD$. Найти радиус меньшей из двух сфер, касающихся граней двугранного угла, образованного плоскостями $BB'C'C$ и $DD'C'C$ и проходящих через точки E и F.

5. В трапеции $ABCD$ основание AD вдвое больше основания BC, угол A равен $\pi/4$, угол D равен $\pi/6$. На диагоналях трапеции как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках M и N. Хорда MN пересекает основание BC в точке F. Найти отношение длины отрезка BF к длине отрезка FC.

Вариант 5

1. Решить уравнение

$$\sin 3x - \sin x = 2\cos^2 2x.$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{2\log_{100} x} > \log_{10}\sqrt{x}.$$

3. В двух сосудах налита вода, в первом сосуде находится 1 *л* воды. Температура воды во втором сосуде равна 10°. Если смешать половину воды из второго сосуда со всей водой первого сосуда, то температура смеси будет 40°. Если же смешать всю воду второго сосуда со всей водой первого, то температура смеси будет 30°. Сколько воды во втором сосуде и какова температура воды в первом сосуде? Считать, что плотность и удельная теплоемкость воды не зависят от температуры.

4. В трехгранный угол, все плоские углы которого равны α, помещена сфера так, что она касается всех ребер трехгранного угла. Грани трехгранного угла пересекают сферу по окружностям радиуса R. Найти радиус сферы.

5. В остроугольном треугольнике ABC угол C равен $\pi/3$. На медианах BM и CN как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках P и Q. Хорда PQ пересекает сторону BC в точке D такой, что $BD : DC = \sqrt{3}$. Найти угол B.

Вариант 6

1. Решить уравнение

$$\cos x + \cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2} = 1.$$

2. Решить неравенство

$$\log_{10}(10x)\cdot\log_2 x<2\log_2 10.$$

3. Расстояние между городами А и В равно 625 *км*. Два автомобиля, выехавшие одновременно настречу друг другу, первый — из А, второй — из В, встретились через 5 *ч*. Если бы первый автомобиль выехал на 4 *ч* 10 *мин* раньше второго, то встреча произошла бы через 3 *ч* после отправления второго автомобиля. Найти скорости автомобилей.

4. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$; при этом $AA'\|BB'\|CC'\|DD'$. Ребро куба равно a. Точка E — центр грани $A'D'DA$. Найти радиус меньшей из двух сфер, проходящих через точки A и E и касающихся граней двугранного угла, образованного плоскостями $BB'C'C$ и $DD'C'C$.

5. В трапеции $ABCD$ основание AD вдвое больше основания BC, угол A равен $\pi/6$, угол D равен $\pi/3$. На диагоналях трапеции как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках K и L. Найти отношение площадей четырехугольников, на которые хорда KL разбивает трапецию $ABCD$.

Разбор варианта 1

Задача 1. Решим уравнение

$$\sin 3x-\sin x+\cos 2x=1.$$

Выполним тождественные преобразования:

$$2\sin x\cos 2x+\cos 2x=1,$$

$$2\sin x\cos 2x=2\sin^2 x,$$

$$\sin x(\cos 2x-\sin x)=0.$$

Отсюда находим

1) $\sin x=0$; $x=\pi n$.

2) $\cos 2x-\sin x=0$,

$$2\sin^2 x+\sin x-1=0,$$

а) $\sin x=-1$, $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$;

б) $\sin x=1/2$, $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$.

Ответ: 1) $x=\pi n$; 2) $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$;

3) $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$.

Задача 2. В этой задаче допустимы $x>0$. Переходя к основанию 10, получаем

$$\lg^2 x+\lg x-2<0.$$

Отсюда

$$-2<\lg x<1,$$
$$1/100<x<10.$$

Ответ: $0{,}01<x<10$.

Задача 3. Обозначим температуру воды из первого и второго сосудов через T_1 и T_2 соответственно. Очевидно, $T_2>T_1$. Это следует из того факта, что повышение в смеси относительной доли воды из первого сосуда приводит к понижению температуры смеси с 49° при соотношении объемов 1 : 3 до 48° при соотношении объемов 2 : 5. Конечно, здесь принимается, что плотность и теплоемкость воды не зависят от температуры.

В силу этого же условия уравнение баланса количества тепла можно записать так:

$$\begin{cases} 49-T_1=3(T_2-49), \\ 2(48-T_1)=5(T_2-48). \end{cases}$$

Первое из этих уравнений отражает тот факт, что сколько тепла необходимо для повышения температуры одной единицы объема воды из первого сосуда от $T°_1$ до 49°, столько же тепла отдают при охлаждении от температуры $T°_2$ до 49° три единицы объема воды из второго сосуда. Второе уравнение имеет аналогичный смысл. Здесь теплоемкости и плотности сокращаются, поскольку в силу условия задачи они считаются независящими от температуры.

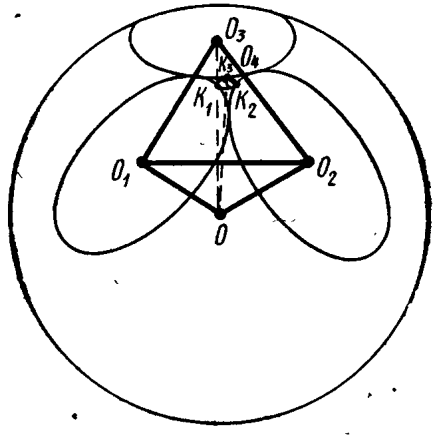


Рис. 50.

Решая эту систему, находим $T_1=28°$, $T_2=56°$.

Ответ: $T_1=28°$, $T_2=56°$.

Задача 4. Чертеж к этой задаче представлен на рис. 50. Обозначим центр сферы посредством буквы O, а через O_1, O_2, O_3— положение на сфере центров окружностей, в которых идет речь в условии задачи. Точка O_4 — центр искомой окружности.

Легко усмотреть, что точки O, O_1, O_2, O_3 являются вершинами правильного тетраэдра с ребром, равным 2 *м*. Действительно, диаметр любой из данных окружностей равен 2 *м*. Поэтому если его концы соединить с центром сферы, точкой O, получится правиль-

ный треугольник. Таким образом, каждую из данных окружностей можно рассматривать как окружность основания прямого кругового конуса с углом при вершине 60°. Значит, мы имеем три одинаковых попарно касающихся прямых круговых конуса с общей вершиной в точке O. Поэтому ясно, что углы O_1OO_2, O_1OO_3, O_2OO_4 равны 60° каждый.

В силу симметрии ясно, что центр искомой окружности, точка O_4 лежит на высоте правильного тетраэдра $OO_1O_2O_3$. Углы O_1OO_4, O_2OO_4 и O_3OO_4 равны между собой и, как легко подсчитать, равны

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

В то же время углы K_1OO_1, K_2OO_2 и K_3OO_3 между радиусами сферы, проведенными в центры окружностей O_1, O_2 и O_3 и точки касания K_1, K_2 и K_3 искомой окружности с данными окружностями, равны по 30°. Таким образом, углы K_1OO_4, K_2OO_4 и K_3OO_4 равны и определяются разностью:

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{6}.$$

Тогда радиус искомой окружности равен:

$$R=2\sin\left[\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{6}\right]=1-\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

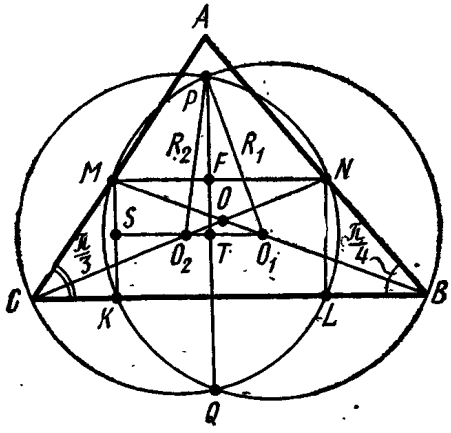


Рис. 51.

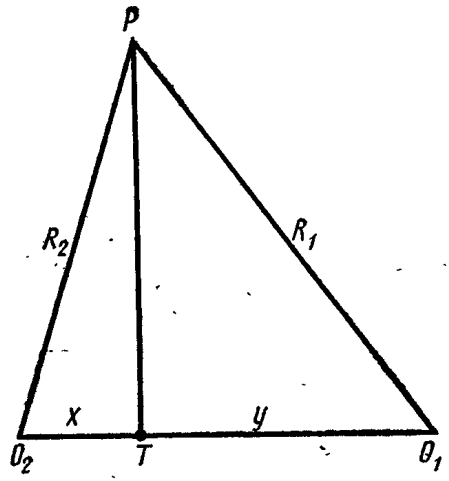


Рис. 52.

Задача 5. Чертеж к этой задаче представлен на рис. 51 и рис. 52. Обозначим через O точку пересечения медиан CN и BM, через O_1 и O_2 — середины медиан, центры построенных окружностей.

Опустим из точек M и N перпендикуляры на основание треугольника BC. Эти перпендикуляры попадут в точки K и L, лежа-

щие на окружностях с центром в точках O_2 и O_1 соответственно. Данное утверждение следует из того, что углы MKB и NLC опираются на диаметры соответствующих окружностей.

Линия центров O_1O_2 параллельна отрезкам MN и BC, а общая хорда окружностей PQ перпендикулярна этим отрезкам. Отсюда следует, что $FM=ST$. Поэтому отношение отрезков $NF:FM$ можно найти следующим образом:

$$\frac{NF}{FM}=\frac{MN-FM}{FM}=\frac{MN-ST}{ST}.$$

Точка S является пересечением O_1O_2 и MK, а точка T — хорды PQ и отрезка O_1O_2. Таким образом, надо найти длины отрезков MN, SO_1 и O_1T.

Обозначим длину основания BC треугольника через 1. Тогда длина средней линии MN равна $1/2$. По теореме синусов находим стороны треугольника AC и AB:

$$\frac{AC}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{AB}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)}.$$

Отсюда:

$$AC=\sqrt{3}-1,\quad AB=2\sqrt{3}/(\sqrt{6}+\sqrt{2}).$$

Учитывая, что $BM=2R_1$ и $CN=2R_2$, где R_1 и R_2 — радиусы окружностей, по теореме косинусов вычисляем радиусы окружностей:

$$R^2_1=\frac{10-4\sqrt{3}}{16}\quad\text{и}\quad R^2_2=\frac{4-\sqrt{3}}{16}.$$

В треугольнике CMK угол CMK равен 30°. Значит,

$$CK=\frac{1}{2}CM=\frac{1}{4}AC=\frac{\sqrt{3}-1}{4}.$$

Поэтому

$$BK=1-\frac{\sqrt{3}-1}{4}=\frac{5-\sqrt{3}}{4},$$

и, наконец,

$$SO_1=\frac{1}{2}BK=\frac{5-\sqrt{3}}{8}.$$

Вычислим теперь длину отрезка ST. Для этого рассмотрим рис. 52. Расстояние O_1O_2 очевидно, равно $1/4$. Составим уравнения

$$R^2_1-y^2=R^2_2-x^2,$$

$$(y-x)\,(y+x)=R^2_1-R^2_2.$$

Легко проверить, что точка P проектируется на отрезок O_1O_2. Здесь $x=O_2T$ и $y=O_1T$. Имеем

$$\begin{cases} y-x=4\,(R^2_1-R^2_2) \\ y+x=\frac{1}{4}, \end{cases}$$

$$y=\frac{1}{8}+2\,(R^2_1-R^2_2).$$

Подставляя значения R^2_1 и R^2_2 находим

$$y=\frac{7-3\sqrt{3}}{8}=O_1T.$$

Тогда

$$ST=\frac{\sqrt{3}-1}{4}.$$

Подставляя полученные значения отрезков MN и ST в выражение для отношения $NF:FM$, получаем *ответ*:

$$NF:FM=\sqrt{3}.$$

§ 25. ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, 1973 г.

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\sqrt{3}\,[\sin x]+\sin 2x=0.$$

2. Решить уравнение

$$3^{|x-1|}=2\left(27^{x-\frac{2}{3}}\right)+1.$$

3. Сумма первых тринадцати членов арифметической прогрессии равна 130. Известно, что четвертый, десятый и седьмой члены этой прогрессии, взятые в указанном порядке, представляют собой три последовательных члена геометрической прогрессии. Найти первый член арифметической прогрессии.

4. Боковые грани треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S образуют одинаковые двугранные углы с плоскостью основания ABC пирамиды, SO — высота пирамиды. Известно, что $\angle ASB=7\pi/12$, $\angle BSC=\pi/2$, $\angle SCA=\pi/3$.

Найти отношение площади треугольника AOB к площади треугольника ABC.

5. Дана окружность с центром O. В ней проведены диаметр IL, хорды IK и KN. Хорда KN пересекает диаметр IL. Из точки N

опущен перпендикуляр NF на IK (F между I и K), а из точки F опущен перпендикуляр FH на IL. Точка S — середина отрезка IO, точка M — середина хорды KN. Известно, что радиус окружности равен R, а $LH=3R/4$.

Найти длину отрезка SM.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$2\sin x+\operatorname{tg} x=0.$$

2. Решить уравнение

$$2^{6x}+8^{x+\frac{2}{3}}-5=0.$$

3. Три последовательных члена геометрической прогрессии a_1, a_2 и a_3 являются соответственно первым, четвертым и двадцать пятым членами арифметической прогрессии. Сумма чисел a_1, a_2, a_3 равна 114.

Найти знаменатель геометрической прогрессии.

4. В треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S боковые грани образуют одинаковые двугранные углы с плоскостью основания ABC пирамиды. Окружность, вписанная в основание, касается ребра AB в точке D, а ребра BC — в точке E.

Известно, что $\angle ASB=7\pi/12$, $\angle BSC=5\pi/12$, $\angle ASC=\pi/2$.

Найти отношение площади треугольника DBE к площади треугольника ABC.

5. Дана окружность с центром O. В ней проведены хорда CD и пересекающий эту хорду диаметр AB. Из точки D опущен перпендикуляр DF на AC (F между A и C), а из точки F опущен перпендикуляр FH на AB. Известно, что радиус окружности R, а $AH=R/4$.

Найти расстояние от середины отрезка AO до середины отрезка CD.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$2\sin 2x+\sqrt{3}\cos x=0.$$

2. Решить уравнение

$$10^{1+x^2}-10^{1-x^2}=99.$$

3. Сумма первых десяти членов арифметической прогрессии равна 30. Четвертый, седьмой и пятый члены этой прогрессии, взятые в указанном порядке, представляют собой три последовательных члена геометрической прогрессии.

Найти разность арифметической прогрессии.

4. В треугольной пирамиде $SABC$ высота SO проходит через точку O — центр круга, вписанного в основание ABC пирамиды. Известно, что $\angle SAC=\pi/3$, $\angle SCA=\pi/4$, а отношение площади треугольника ABC к площади треугольника AOB равна $2-\sqrt{3}$.

Найти угол BSC.

5. В окружность с центром O вписана трапеция $ABCD$ ($BC\|AD$). В этой же окружности проведены диаметр CE и хорда BE, пересекающая AD в точке F. Точка H — основание перпендикуляра, опущенного из точки F на CE, S — середина отрезка EO, M — середина отрезка BD. Известно, что радиус окружности равен R, а $CH=9R/8$.

Найти длину отрезка SM.

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$2\sin x+\cos 2x=1.$$

2. Решить уравнение

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{3x}-\left(\frac{1}{8}\right)^{x-1}-128=0.$$

3. Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии равна 62. Известно, что пятый, восьмой, одиннадцатый члены этой прогрессии являются соответственно первым, вторым, десятым членами арифметической прогрессии.

Найти первый член геометрической прогрессии.

4. Прямой круговой конус с вершиной S вписан в треугольную пирамиду $SPQR$ так, что окружность основания конуса вписана в основание PQR пирамиды. Известно, что $\angle PSR=\pi/2$, $\angle SQR=\pi/4$, $\angle PSQ=7\pi/12$.

Найти отношение площади боковой поверхности конуса к площади основания PQR пирамиды.

5. Дан круг с центром O. Через точку внутри круга проведены диаметр AB и хорда CD. Из точки D опущен перпендикуляр DF на хорду AC (F между A и C), а из точки F опущен перпендикуляр FH на AB. Точка M — середина хорды CD. Известно, что $AM=2MO$, $8AH=5AB$.

Найти угол AMO.

Вариант 5

1. Решить уравнение

$$2\cos x-\operatorname{ctg} x=0.$$

2. Решить уравнение

$$64^{\frac{1}{x}}-2^{3+\frac{3}{x}}+12=0.$$

3. Три различных числа a, b, c, сумма которых равна 124, являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии. Одновременно эти три числа a, b и c являются соответственно третьим, тринадцатым и пятнадцатым членами арифметической прогрессии. Найти числа a, b, c.

4. В треугольной пирамиде $SKLM$ высота SO проходит через точку O — центр окружности, вписанной в основание KLM пирамиды. Эта окружность касается ребра KL в точке D, а ребра LM — в точке E. Известно, что $\angle SKL=\pi/3$, $\angle SLK=\pi/4$, а отношение площади треугольника DLE к площади треугольника KLM равно $(3-\sqrt{3})/4$.

Найти угол LSM.

5. В окружности с центром O проведены параллельные хорды PQ и RS, диаметр SE и хорда RE. Хорда RE пересекает хорду PQ в точке F, из точки F опущен перпендикуляр FH на SE. Известно, что радиус окружности равен r, а $EH=3r/8$.

Найти расстояние от середины отрезка EO до середины хорды RQ.

Вариант 6

1. Решить уравнение

$$\sqrt{3}\cos x-\cos 2x=1.$$

2. Решить уравнение

$$5^{x-1}+5^{3-x}=26.$$

3. Известно, что первый, четвертый и тридцать первый члены арифметической прогрессии являются соответственно четвертым, седьмым и десятым членами геометрической прогрессии. Сумма первых четырех членов этой геометрической прогрессии равна 40.

Найти первые два члена геометрической прогрессии.

4. В треугольную пирамиду $SPQR$ вписан прямой круговой конус с вершиной S, окружность основания которого вписана в основание PQR пирамиды. Известно, что $\angle SQR=\pi/4$, $\angle SRQ=\pi/3$, $\angle PSR=5\pi/12$.

Найти отношение площади боковой поверхности конуса к площади основания PQR пирамиды.

Разбор варианта 1

Задача 1. Представляя исходное уравнение в виде

$$\sqrt{3}\sin x+2\sin x\cos x=0,$$

получим

$$\sin x(\sqrt{3}+2\cos x)=0.$$

Отсюда находим:

а) $\sin x = 0$, $x = \pi n$;

б) $\sqrt{3} + 2\cos x = 0$,

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n.$$

Ответ: $x = \pi n$, $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$.

Задача 2. Введем новое обозначение

$$3^{3x} = t \geqslant 0.$$

Тогда получим квадратное уравнение

$$\frac{1}{27}t^2 = \frac{2}{9}t + 1$$

или

$$t^2 - 6t - 27 = 0.$$

Отсюда находим $t_1 = -3$, $t_2 = 9$. Первый корень не дает решений, так как $t > 0$. Поэтому остается $t = 9$

$$3^{3x} = 9, \quad x = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $^2/_3$.

Задача 3. Пусть a_1, a_2, a_3 и т. д. члены арифметической прогрессии, разность которой обозначим через d. Тогда условие задачи позволяет записать два уравнения:

$$S_{13} = \frac{a_1 + a_{13}}{2} \cdot 13 = 130$$

$$a^2_{10} = a_4 \cdot a_7.$$

Здесь S_{13} — сумма первых тринадцати членов прогрессии.

Поскольку

$$a_4 = a_1 + 3d,$$

$$a_7 = a_1 + 6d,$$

$$a_{10} = a_1 + 9d,$$

$$a_{13} = a_1 + 12d,$$

то из первого уравнения получаем

$$a_1 + 6d = 10,$$

а из второго

$$(a_1 + 9d)^2 = (a_1 + 3d)(a_1 + 6d)$$

или с учетом первого уравнения:

$$(10+3d)^2=(10-3d)\cdot 10.$$

Отсюда находим два значения разности прогрессии

$$d_1=0,\quad d_2=-10.$$

Соответственно находим $a_1=10$, $a_1=70$. Очевидно, что оба значения первого члена прогрессии удовлетворяют всем условиям задачи.

Ответ: 10, 70.

Задача 4. Обозначим ребра пирамиды SA, SB и SC через a, b и c соответственно (рис. 53), угол ASC — посредством α.

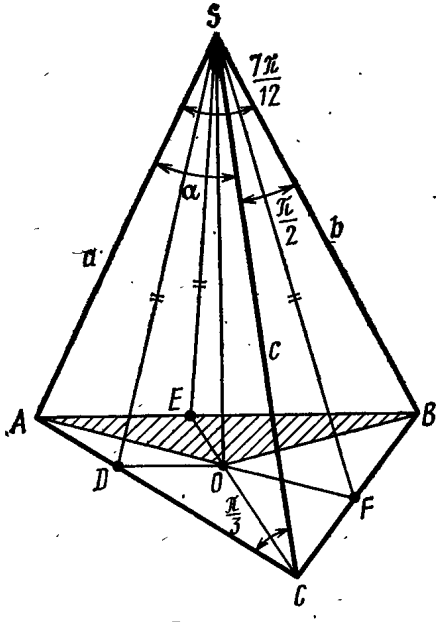


Рис. 53.

Проведем высоты боковых граней пирамиды SD, SE и SF и соединим точки D, E, F с точкой O.

Очевидно, что прямоугольные треугольники SDO, SEO и SFO равны. Это следует из того, что они обладают одинаковым острым углом при основании, который является в то же время линейным углом двугранного угла между боковыми гранями и основанием пирамиды. Отсюда следует, что точка O—центр окружности, вписанной в основание, а апофемы боковых граней пирамид равны.

Поскольку площадь каждого из треугольников AOB, AOC и BOC равна площади проекции соответствующей боковой грани пирамиды на основание, а угол проектирования для всех боковых граней один и тот же, то отношение площади треугольника AOB к площади треугольника ABC равно

$$\frac{S_{AOB}}{S_{ABC}}=\frac{S_{ASB}}{S_{ASB}+S_{ASC}+S_{BSC}}$$

или

$$\frac{S_{AOB}}{S_{ABC}}=\frac{ab\sin\frac{7\pi}{12}}{ab\sin\frac{7\pi}{12}+ac\sin\alpha+bc},$$

$$\frac{S_{AOB}}{S_{ABC}}=\frac{\sin\frac{7\pi}{12}}{\sin\frac{7\pi}{12}+\frac{c}{b}\sin\alpha+\frac{c}{a}}.$$

Таким образом, чтобы найти искомое отношение площадей, нужно найти угол α и отношения ребер c/b и c/a.

Для этой цели используем следующие равенства, которые следуют из записи площадей боковых граней пирамиды:

1) $bc = h\sqrt{c^2+b^2}$,

2) $c\sin\frac{\pi}{3} = h$,

3) $ab\sin\frac{7\pi}{12} = h\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\frac{7\pi}{12}}$.

Здесь h — высота боковых граней пирамиды $SABC$.

Комбинируя первое и второе уравнения, получим

$$b = c\sin\frac{\pi}{3}\sqrt{1+\left(\frac{b}{c}\right)^2},$$

$$\frac{b}{c} = \frac{3}{4}+\frac{3}{4}\left(\frac{b}{c}\right)^2,$$

$$\frac{b}{c} = \sqrt{3}.$$

Комбинируя второе и третье равенства, получаем уравнение для определения отношения a/c:

$$ab\sin\frac{7\pi}{12} = c\cdot\sin\frac{\pi}{3}\cdot c\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2-2\left(\frac{a}{c}\right)\left(\frac{b}{c}\right)\cos\frac{7\pi}{12}}$$

или

$$\frac{a}{c}\sqrt{3}\cdot\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2+3-2\sqrt{3}\left(\frac{a}{c}\right)\cos\frac{7\pi}{12}}.$$

Заметим, что

$$\cos^2\frac{7\pi}{12} = \frac{1+\cos\frac{7\pi}{6}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4},$$

$$\cos\frac{7\pi}{12} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2};$$

$$\sin^2\frac{7\pi}{12} = \frac{1-\cos\frac{7\pi}{6}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4},$$

$$\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$$

Тогда рассматриваемое уравнение приобретает вид

$$(1+\sqrt{3})\left(\frac{a}{c}\right)^2-2\sqrt{3}\left(\frac{a}{c}\right)\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}-3=0.$$

Отсюда находится положительный корень

$$\frac{a}{c}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Определим теперь угол α. Из треугольника ASC с помощью теоремы синусов находим

$$\frac{a}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{c}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)},$$

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cdot\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Учитывая, что α — положительная величина, получаем

$$\alpha+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{4}$$

и окончательно

$$\alpha=\frac{5\pi}{12}.$$

Теперь можно вычислить искомое отношение площадей треугольников. Оно равно

$$\frac{S_{AOB}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}}.$$

После несложных упрощений получается

$$\frac{S_{AOB}}{S_{ABC}}=\frac{9+\sqrt{3}}{26}.$$

Ответ: $(9+\sqrt{3})/26$.

Задача 5. Чертеж к этой задаче изображен на рис. 54. Обозначим через Q проекцию точки M на хорду IK, а через T — проекцию точки S на эту же хорду. Проведем через точку S прямую, параллельную хорде IK, до пересечения с MQ в точке P. Длину искомого отрезка SM будем определять из прямоугольного треугольника SPM:

$$SM^2=SP^2+PM^2.$$

Осуществим этот процесс непосредственными вычислениями. Для этого обозначим угол KIL через α.

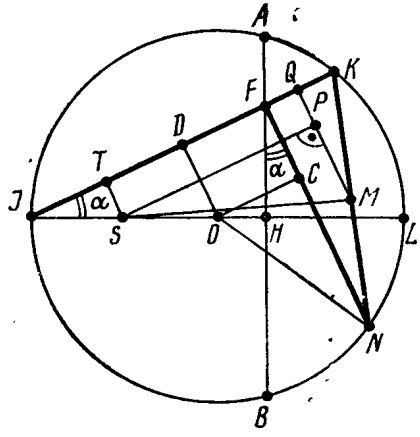


Рис. 54.

1. Определим сначала длины отрезков IK, IT, IF и IQ. Из $\triangle ILK$:

$$IK = 2R\cos\alpha.$$

Из $\triangle IST$:

$$IT = \frac{R}{2}\cos\alpha.$$

Из $\triangle IHF$:

$$IF = \frac{5}{4}\,\frac{R}{\cos\alpha}.$$

Поскольку MQ — средняя линия треугольника FKN, имеем

$$IQ = \frac{1}{2}[IF + IK] = \frac{5}{8}\,\frac{R}{\cos\alpha} + R\cos\alpha.$$

2. Определим катет SP треугольника SPM:

$$SP = IQ - IT = \frac{5}{8}\,\frac{R}{\cos\alpha} + \frac{R}{2}\cos\alpha.$$

3. Вычислим длину отрезка FN:

$$FN = FC + CN.$$

Здесь точка C — проекция центра окружности на FN:

$$FC = OD = R\sin\alpha; \quad CN = \sqrt{R^2 - OC^2}.$$

$$OC = IF - ID; \quad ID = R\cos\alpha.$$

Здесь точка D проекция центра окружности на IK:

$$OC = \frac{5}{4}\,\frac{R}{\cos\alpha} - R\cos\alpha.$$

Итак,

$$FN = R\sin\alpha + \sqrt{R^2 - \left(\frac{5}{4}\,\frac{R}{\cos\alpha} - R\cos\alpha\right)^2}.$$

4. Определим теперь катет PM треугольника SPM:

$$PM = QM - QP,$$

$$QP = ST = \frac{R}{2}\sin\alpha; \quad OM = \frac{1}{2}FN.$$

Отсюда

$$PM = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - \left(\frac{5}{4}\,\frac{R}{\cos\alpha} - R\cos\alpha\right)^2}.$$

5. Теперь по теореме Пифагора вычислим длину искомого отрезка SM:

$$SM^2=\left(\frac{5}{8}\frac{R}{\cos\alpha}+\frac{R}{2}\cos\alpha\right)^2+$$

$$+\left[\frac{1}{2}\sqrt{R^2-\left(\frac{5}{4}\frac{R}{\cos\alpha}-R\cos\alpha\right)^2}\right]^2.$$

$$SM^2=\frac{3}{2}R^2,\quad SM=\frac{R\sqrt{6}}{2}.$$

Ответ: $SM=R\sqrt{6}/2$.

Замечание. Длина найденного отрезка SM не зависит от величины угла α. Тем самым показано, что середины гипотенуз прямоугольных треугольников FKN, построенных указанным в условии задачи способом, образуют геометрическое место точек, представляющее собой дугу окружности с центром в точке S и радиусом $R\sqrt{6}/2$.

Отсюда открывается другая возможность решения задачи. Доказав каким-либо способом (найдите геометрическое доказательство), что рассматриваемое геометрическое место точек M есть дуга окружности, проходящей, очевидно, через точку A и середину хорды BL, можно вычислить радиус этой окружности как расстояние между точкой S и серединой хорды BL.

§ 26. ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, 1974 г.

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\frac{\operatorname{ctg}x}{\cos 2x}=2+\operatorname{tg}2x.$$

2. Решить неравенство

$$3|x-1|>(x-1)^2+1.$$

3. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{4\log_{16}^2 x}-3\sqrt[3]{\log_4 x}-4=0.$$

4. В круг радиуса R с центром в точке O вписана трапеция $ABCD$ ($BC<AD$ и точка O лежит внутри трапеции). Непараллельные стороны трапеции AB и CD равны R. Точка K — середина радиуса OA, точка L — середина радиуса OD, точка M — середина стороны BC. Отношение площади трапеции к площади треугольника KLM равно 4. Найти длину отрезка MC.

5. Дана пирамида $SABC$, все ребра которой равны a, SO — высота. Точка T — середина ребра BC. На перпендикуляре к плоскости ABC в точке T отложен отрезок TM, равный SO. Через точки S и M проведена плоскость параллельно плоскости ABC, и в этой плоскости построен правильный треугольник PQR с центром в точке M и стороной a, так, что точка S — середина отрезка QM. Найти объем общей части пирамид $SABC$ и $TPQR$.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\sqrt{3} - \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{4\pi}{3} - x\right).$$

2. Решить неравенство

$$x^2 - 2|x+1| < 0.$$

3. Решить уравнение

$$2\sqrt[3]{2\log_{16}^2 x} - \sqrt[3]{\log_2 x} - 6 = 0.$$

4. Два одинаковых правильных треугольника ABC и CDE со стороной 1 расположены на плоскости так, что имеют только одну общую точку C, и угол BCD меньше, чем $\pi/3$. Точка K — середина AC, точка L — середина CE, точка M — середина отрезка прямой BD. Площадь треугольника KLM равна $\sqrt{3}/5$. Найти длину отрезка BD.

5. Даны две треугольные пирамиды $SABC$ и $NKLM$, все ребра которых равны a. Эти пирамиды имеют общую высоту SN (S — центр грани KLM и N — центр грани ABC). Кроме того, $KL \parallel BC$ и пирамиды расположены так, что плоскость, проходящая через KL и BC, пересекает отрезок SN. Найти объем общей части пирамиды $SABC$ и $NKLM$.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$\sin x + \cos x - 1 = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}(\cos x - 1).$$

2. Решить неравенство

$$(|x|-1)^2 > 2.$$

3. Решить уравнение

$$\frac{3}{4}\log_{\sqrt{3}}^2 x - 30\sqrt{\log_3^2 x} + 36 = 0.$$

4. Из точки K, расположенной вне окружности с центром O, проведены к этой окружности две касательные MK и NK (M и N — точки касания). На хорде MN взята точка C ($MC<CN$). Через точку C перпендикулярно к отрезку OC проведена прямая, пересекающая отрезок NK в точке B. Известно, что радиус окружности равен R, $\angle MKN=\alpha$, $MC=b$. Найти длину отрезка CB.

5. В основании треугольника пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный равнобедренный треугольник ABC. Точка D — середина гипотенузы AB, SD — высота пирамиды, $SD=DC=a$. Через точку S проведена плоскость, перпендикулярная к SD, и в этой плоскости построен прямоугольный треугольник SEF так, что точка S — вершина прямого угла, $SE=SF=a\sqrt{2}$, а $EF\parallel AB$. Кроме того, треугольник SEF расположен так, что плоскость, проходящая через EF и AB, пересекает ребро SC. Найти объем общей части пирамид $SABC$ и $SDEF$.

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg}\left(x+\frac{5\pi}{4}\right)=\operatorname{ctg}x-1.$$

2. Решить неравенство

$$|x|-2>(x-2)^2.$$

3. Решить уравнение

$$64\log_{\sqrt{x}}^3 x-4\sqrt{\log_{\sqrt{x}}^3 x}+3=0.$$

4. На биссектрисе угла с вершиной L взята точка A. Точки K и M — основания перпендикуляров, опущенных из A на стороны угла. На отрезке KM взята точка P ($KP<PM$), и через точку P перпендикулярно к отрезку AP проведена прямая, пересекающая прямую KL в точке Q (K между Q и L), а прямую ML — в точке S. Известно, что $\angle KLM=\alpha$, $KM=a$, $QS=b$. Найти длину отрезка KQ.

5. Дана треугольная пирамида $SABC$, $SA=AB=BC=AC=a$. Ребро SA перпендикулярно основанию ABC. Точка H — середина BC. Через точку H проведен отрезок KL, параллельный SA и равный a, так что точка H — середина KL. В плоскости ABC проведен отрезок MA, параллельный BC и равный a. Найти объем общей части пирамид $SABC$ и $MAKL$.

Разбор варианта 1

Задача 1. Воспользуемся формулами

$$\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x},\quad \operatorname{ctg}x=\frac{1}{\operatorname{tg}x},\quad \cos 2x=\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x},$$

заметив при этом, что те x, для которых $\operatorname{tg}x$ не существует, т. е.

$\pi/2+\pi n$ не являются решениями исходного уравнения. Обозначим $\operatorname{tg} x=t$. Тогда

$$\frac{1+t^2}{t(1-t^2)}=2+\frac{2t}{1-t^2}, \quad t\neq\pm 1, \quad t\neq 0.$$

Имеем:

$$1+t^2=2t-2t^3+2t^2,$$
$$2t^3-2t+1-t^2=0,$$
$$2t(t^2-1)-(t^2-1)=0,$$
$$(t^2-1)(2t-1)=0.$$

Поскольку $t\neq\pm 1$, то $t=1/2$.

$$\operatorname{tg} x=\frac{1}{2}, \quad x=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi m.$$

Ответ: $x=\operatorname{arctg} 1/2+\pi m$, $m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Задача 2. Заметим, что верно тождество

$$(x-1)^2=|x-1|^2.$$

Обозначив $t=|x-1|\geqslant 0$, получим

$$t^2-3t+1<0,$$
$$\frac{3-\sqrt{5}}{2}<t<\frac{3+\sqrt{5}}{2},$$
$$\frac{3-\sqrt{5}}{2}<|x-1|<\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Решения этого неравенства имеют вид:

1. $\frac{3-\sqrt{5}}{2}<x-1<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$,

$$\frac{5-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{5+\sqrt{5}}{2}.$$

2. $-\frac{3+\sqrt{5}}{2}<x-1<-\frac{3-\sqrt{5}}{2}$,

$$-\frac{\sqrt{5}+1}{2}<x<\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Ответ: $(5-\sqrt{5})/2<x<(5+\sqrt{5})/2$, $-(1+\sqrt{5})/2<x<(\sqrt{5}-1)/2$.

Задача 3. Введем обозначение

$t=\sqrt[3]{\log_8 x}=\sqrt[3]{2\log_{64} x}$.

Тогда уравнение принимает вид:

$$t^2-3t-4=0$$

и его решениями являются числа $t_1=4$ и $t_2=-1$. Рассмотрим оба варианта:

1. $\sqrt[3]{\log_5 x}=4$,

$$\log_5 x=64, \quad x=5^{64}.$$

2. $\sqrt[3]{\log_5 x}=-1$,

$$\log_5 x=-1, \quad x=\frac{1}{5}.$$

Ответ: $x_1=5^{64}$, $x_2=\frac{1}{5}$.

Задача 4. Чертеж к этой задаче представлен на рис. 55. Обозначим $\angle OBC=\alpha$. Тогда $\angle BOM=\frac{\pi}{2}-\alpha$. Поскольку $\triangle ABO$ — равносторонний, то $\angle AOB=\pi/3$ и, следовательно,

$$\angle AON=\pi-\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\alpha+\frac{\pi}{6}.$$

Имеем

$$BC=2R\cdot\cos\alpha, \quad AD=2R\cdot\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right);$$

$$OM=R\cdot\sin\alpha, \quad ON=R\cdot\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right),$$

$$OT=\frac{R}{2}\cdot\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right).$$

Имея эти соотношения, находим площади равнобочной трапеции $ABCD$ и треугольника KLM:

$$S_{ABCD}=\frac{BC+AD}{2}\cdot MN=R^2\left[\cos\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\right]\times$$
$$\times\left[\sin\alpha+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\right],$$

$$S_{KLM}=\frac{1}{2}\cdot KL\cdot TM=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2R^2\cdot\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\times$$
$$\times\left[\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\right].$$

Составляя отношение площадей трапеции и треугольника, получим уравнение, из которого определяется $\cos\alpha$:

$$\left[\cos\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\right]\left[\sin\alpha+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\right]=$$
$$=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\left[2\sin\alpha+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

или

$$\left(\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha\right)\left(\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\sin\alpha\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha\right)\left(2\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\sin\alpha\right).$$

Это — однородное уравнение относительно $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Разделив его части на $\cos^2\alpha$ и обозначив $\operatorname{tg}\alpha$ через t, приходим к урав-

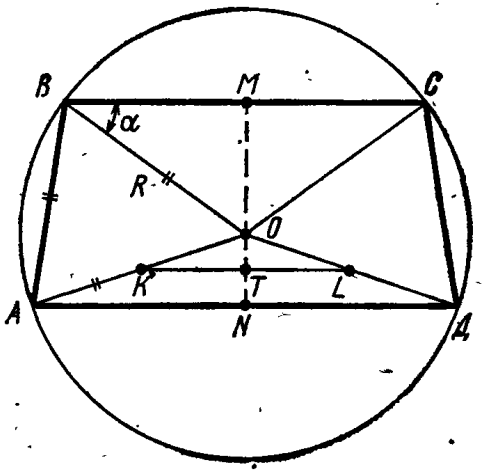


Рис. 55.

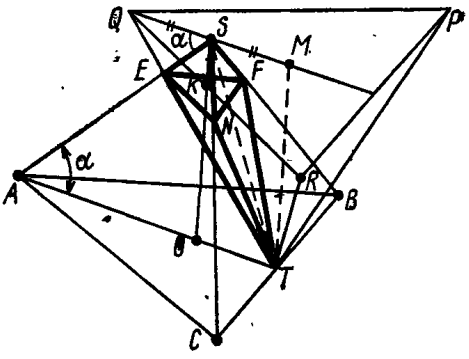


Рис. 56.

нению

$$\sqrt{3}\,(t+\sqrt{3})^3=\sqrt{3}\,(t\sqrt{3}+1)^3$$

или

$$t^3=1.$$

Отсюда имеем: $t_1=-1$, $t_2=1$. Очевидно, что подходит только второе решение. Итак, $\operatorname{tg}\alpha=1$, $\alpha=\pi/4$. После этого легко находим, что $MC=R\sqrt{2}/2$.

Ответ: $R\sqrt{2}/2$.

Задача 5. Чертеж к этой задаче представлен на рис. 56. Из условия равенства отрезков QS и SM следует, что $QM=AO$ и, значит, равны высоты оснований пирамид. Поэтому можно заключить, что равны и ребра пирамид. Общая часть этих пирамид представляется многогранником $SEFNT$, который состоит из двух пирамид: $SEFN$ и $TEFN$, у которых $\triangle EFN$ — общее основание, а сумма высот равна высоте пирамиды SO. Для того чтобы найти точки N и F, которые определяют прямые EN и EF, по которым пересекаются грани ASC и QRT, а также ASB и QPT пирамид, достаточно провести $EN\parallel AC$ и $EF\parallel AB$. Это легко следует из изве-

стной теоремы о том, что если плоскость (например, QRT), проходящая через прямую (QR), параллельна другой плоскости (в данном случае плоскости ASC), то линия пересечения этих плоскостей (EN) параллельна данной прямой: $EN \| QR \| AC$.

Перейдем к вычислениям. Из условия задачи и построения следует также, что пл. $\triangle EFN \|$ пл. $\triangle ABC$. Отсюда имеем:

$$\frac{S_{EFN}}{S_{ABC}} = \left(\frac{EK}{AO}\right)^2 = \left(\frac{SE}{SA}\right)^2$$

или

$$S_{EFN} = \left(\frac{SE}{SA}\right)^2 \cdot S_{ABC}.$$

Вычислим сомножители, входящие в последнее соотношение. Имеем

$$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Отрезок SE находится из $\triangle EQS$. Обозначим $\angle OAS$ через α. Поскольку $QS \| AO$, то и угол QSA равен α. $QS = \frac{a\sqrt{3}}{2} / 3$. Далее находим: $QS = 2SE\cos\alpha$; $SE = a/(4\sqrt{3}\cos\alpha)$, где

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{3}} : a = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Итак $SE = a/4$. Тогда

$$S_{EFN} = \frac{1}{16} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{64}.$$

Пусть $SK = h_1$, $KO = h_2$. Тогда

$$V_{SEFNT} = V_{SEFN} + V_{TEFN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{64} \cdot h_1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{64} \cdot h_2 =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{64} \cdot (h_1 + h_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{64} \cdot a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{192}.$$

Ответ: $a^3\sqrt{2}/192$.

§ 27. ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, 1975 г.

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\cos(3x+5) - \cos(x+1) = 2\sin(x+2).$$

2. Решить уравнение

$$9^{\log_{\frac{1}{3}}(x+2)} = 7^{\log_{\frac{1}{7}}(2x^2+3x+2)}.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{2x^2-11x+15}{2^x-6}<0.$$

4. В треугольнике ABC $AB=AC$ и угол BAC — тупой. Пусть D — точка пересечения биссектрисы угла ABC со стороной AC, M — основание перпендикуляра, опущенного из A на сторону BC, E — основание перпендикуляра, опущенного из D на сторону BC. Через точку D проведен также перпендикуляр к BD до пересечения со стороной BC в точке F. Известно, что $ME=FC=a$. Найти площадь треугольника ABC.

5. В треугольнике ABC угол ACB — прямой, $AC=a$, $BC=3a$. Через точку B проведена в пространстве прямая, перпендикулярная отрезку BC и на этой прямой взята точка D так, что $BD=a$. Двугранный угол между плоскостями, которым принадлежат треугольники BCD и ABC, равен $\pi/3$. Шар касается отрезка AB в такой точке P, что $AB=3\cdot AP$, и касается отрезка CD в такой точке Q, что $CD=3\cdot QD$. Найти радиус шара.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$2\sin(x+3)\cos(4x-1)+\sin(3x-4)=0.$$

2. Решить уравнение

$$6^{\log_{\frac{1}{6}}(x+3)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_4(x^2+5x+12)}.$$

3. Решить неравенство

$$(2-5^x)(7x^2-10x+3)<0.$$

4. В прямоугольном треугольнике ABC угол ACB — прямой. Пусть E — точка пересечения биссектрисы угла ABC со стороной AC, точка D — середина стороны AB, O — точка пересечения отрезков BE и CD. Через точку O проведен перпендикуляр к BO до пересечения со стороной BC в точке F. Известно, что $FC=b$, $OC=3b/2$. Найти площадь треугольника ABC.

5. Два равных треугольника KLM и KLN имеют общую сторону KL, $\angle KLM=\angle LKN=\pi/3$, $KL=a$, $LM=KN=6a$. Плоскости KLM и KLN взаимно перпендикулярны. Шар касается отрезков LM и KN в их серединах. Найти радиус шара.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$\sin(x+7)+\sin(3x-1)=\cos(x-4).$$

2. Решить уравнение

$$\left(\frac{1}{25}\right)^{\log_5(x+5)}=3^{\log_{\frac{1}{3}}(2x^2+9x+13)}.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{3x-2}{5x^2+22x-15}>0.$$

4. На биссектрисе острого угла AOC взята точка B. Через точку B проведена прямая, перпендикулярная к OB и пересекающая сторону AO в точке K, а сторону OC — в точке L. Через точку B проведена еще одна прямая, пересекающая сторону AO в точке M (M между O и K), а сторону OC — в точке N так, что $\angle MON=\angle MNO$. Известно, что $MK=a$, $LN=3a/2$. Найти площадь треугольника MON.

5. В треугольнике ABC угол ACB — прямой, $\angle BAC=\frac{\pi}{6}$, $BC=m$. На перпендикуляре к отрезку AC, проходящем в пространстве через точку A, взята точка D так, что $AD=m$. Полуплоскости, которым принадлежат треугольники ABC и ACD, образуют двугранный угол, равный $\pi/3$.

Шар касается AB в такой точке K, что $AK=\frac{5}{6}AB$ и касается отрезка CD в такой точке L, что $CL=\frac{5}{6}\cdot CD$. Найти радиус шара.

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$2\sin(2x-3)\cos(x+1)-\sin(3x-2)=0.$$

2. Решить уравнение

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3(x^2+2x+4)}=6^{\log_{\frac{1}{6}}(x+2)}.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{3x^2-x-14}{5-2x}<0.$$

4. В треугольнике ABC $AB=BC$. Пусть D — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на сторону AC, E — точка пересечения биссектрисы угла BAC со стороной BC. Через точку E проведен перпендикуляр к AE до пересечения с продолжением стороны AC в точке F (C между D и F). Известно, что $AD=m$, $FC=m/4$. Найти площадь треугольника ABC.

5. Два равных треугольника KLN и LMN имеют общую сторону LN, $\angle LNK=\angle NLM=\pi/6$, $LN=2\sqrt{3}b$, $KN=LM=12\ b$. Плоскость KLN перпендикулярна плоскости LMN. На отрезке KN взята такая точка P, что $KP=\frac{1}{3}KN$, а на стороне LM взята такая точка Q, что $QM=\frac{1}{3}LM$. Шар касается отрезка KN в точке P и касается отрезка LM в точке Q. Найти радиус шара.

Вариант 5

1. Решить уравнение

$$\sin(x-7)-\sin(3x-3)=2\cos(2x-5).$$

2. Решить уравнение

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_4(2x^2+3x+3)}=(\sqrt{5})^{\log_{\frac{1}{5}}(x^2+2x+9)}.$$

3. Решить неравенство

$$(5x^2-12x+4)(6^x-2)<0.$$

4. В прямоугольном треугольнике ABC угол ACB — прямой. Пусть D — точка пересечения биссектрисы угла BAC со стороной BC, точка E — середина стороны AB, O — точка пересечения отрезка AD с отрезком CE. Через точку O проведена прямая, перпендикулярная к AD до пересечения со стороной AB в точке K, а со стороной AC — в точке M. Известно, что $MC=a$, $EK=2a/3$. Найти площадь треугольника ABC.

5. В треугольнике ABC угол BCA — прямой, $AC=b$, $BC=2b$. На прямой, проходящей в пространстве через точку B перпендикулярно к отрезку BC, взята точка D так, что $BD=b$. Двугранный угол между полуплоскостями, которым принадлежат треугольники ABC и BCD, равен $2\pi/3$.

Шар касается отрезка AB в такой точке M, что $BM=\frac{3}{4}AB$ и касается отрезка CD в такой точке N, что $CN=\frac{3}{4}CD$. Найти радиус шара.

Вариант 6

1. Решить уравнение

$$2\cos(x+4)\cos(2x+1)-\cos(3x+5)=0.$$

2. Решить уравнение

$$2^{\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{2}\right)}=3^{\log_3(6-x)}.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{2x-3}{3x^2-8x+5}>0.$$

4. В прямоугольнике $ABCD$ ($BC>CD$) диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Биссектриса угла CAD пересекает BD в точке E. Пусть F — основание перпендикуляра, опущенного из точки E на сторону AD, точка K — середина AD. Через точку E проведен также перпендикуляр к AE до пересечения с диагональю AC в точке H. Известно, что $OH=b$, $KF=4b/3$. Найти площадь прямоугольника $ABCD$.

5. Отрезок LM служит общей стороной двух равных треугольников KLM и LMN, в которых $\angle KML=\angle MLN=\pi/4$, $LM=2m$, $LN=KM=4m\sqrt{2}$. Плоскости KLM и LMN взаимно перпендикулярны. Шар касается отрезка KM в такой точке A, что $AK=m\sqrt{2}$ и касается отрезка LN в такой точке B, что $BN=m\sqrt{2}$. Найти радиус шара.

Разбор варианта 1

Задача 1. Преобразуем данное уравнение к следующему виду:

$$-2\sin(2x+3)\sin(x+2)=2\sin(x+2)$$

и далее имеем

1. $\sin(x+2)=0$, $x+2=\pi m$, $x=-2+\pi m$;

2. $\sin(2x+3)=-1$, $2x+3=-\frac{\pi}{2}+2\pi m$,

$$2x=-\frac{\pi}{2}-3+2\pi m,$$

$$x=-\frac{\pi+6}{4}+\pi m.$$

Ответ: $x=-2+\pi m$, $x=-(\pi+6)/4+\pi m$, где $m=0, \pm1, \pm2 \ldots$.

Задача 2. Область допустимых значений неизвестного определяется неравенствами

$$x+2>0,$$
$$2x^2+3x+2>0,$$

из которых следует, что $x>-2$.

Запишем исходное уравнение в следующем виде:

$$3^{\log_3(x+2)^{-2}}=7^{\log_7(2x^2+3x+2)^{-1}}$$

или

$$\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{1}{2x^2+3x+2}.$$

Далее имеем

$$x^2-x-2=0,$$
$$x_1=2,\ x_2=-1.$$

Поскольку оба значения удовлетворяют условию $x>-2$, то они оба служат решениями уравнения.

Ответ: $x=2$, $n=-1$.

Задача 3. Возможны два случая.

1.

$$\begin{cases}2x^2-11x+15>0,\\ 2^x-6<0;\end{cases}$$
$$\begin{cases}x<2{,}5 \text{ или } x>3,\\ x<\log_2 6.\end{cases}$$

2.

$$\begin{cases}2x^2-11x+15<0,\\ 2^x-6>0;\end{cases}$$
$$\begin{cases}2{,}5<x<3,\\ x>\log_2 6.\end{cases}$$

Рассмотрим первый вариант. Очевидно, что $\log_2 6<3$. Сравним между собой числа $\log_2 6$ и 2,5.

$$\log_2 6 \vee \frac{5}{2}.$$

($\vee$ — знак сравнения, заменяющий неизвестный заранее знак $>$ или $<$.)

$$6 \vee 2^{\frac{5}{2}},$$
$$6 \vee \sqrt{32},$$
$$6>\sqrt{32}.$$

Таким образом, $\log_2 6>2{,}5$. Тогда решения первого варианта имеют вид: $x<2{,}5$.

Во втором варианте решения имеют вид: $\log_2 6 < x < 3$.

Ответ: $x < 2{,}5$; $\log_2 6 < x < 3$.

Задача 4. Чертеж к этой задаче изображен на рис. 57. Все построения очевидны; заметим только, что точка F лежит на стороне BC, а не на ее продолжении, благодаря тому, что угол BAC — тупой.

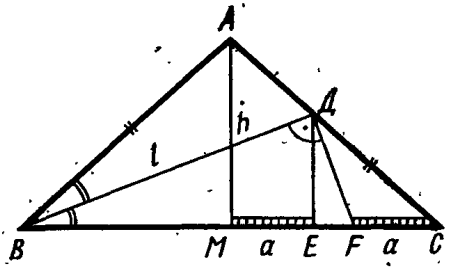


Рис. 57.

Введем две неизвестные величины: x — длину основания и 2α — угол ABC. Биссектрису BD будем обозначать l, а высоту AM — h. Составим два уравнения для нахождения величин α и x.

Вычислим сначала длину биссектрисы l. Для этого запишем двумя различными способами площадь треугольника ABC:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} x \cdot \underbrace{\frac{x}{2} \operatorname{tg} 2\alpha}_{h} = \frac{1}{2} l \cdot x \sin\alpha + \frac{1}{2} l \cdot \frac{x}{2\cos 2\alpha} \cdot \sin\alpha.$$

Отсюда находим, что

$$l = x \frac{2\cos\alpha}{2\cos 2\alpha + 1}.$$

Из прямоугольного треугольника BDE находим BE:

$$BE = l\cos\alpha = x \frac{2\cos^2\alpha}{2\cos 2\alpha + 1}.$$

С другой стороны, BE равен $(x/2 + a)$. Поэтому получаем первое уравнение

$$x \frac{2\cos^2\alpha}{2\cos 2\alpha + 1} = \frac{x}{2} + a$$

или

$$\frac{x}{1 + 2\cos 2\alpha} = 2a. \qquad (1)$$

Из прямоугольного треугольника BDF можно найти длину отрезка BF:

$$BF = \frac{l}{\cos\alpha} = \frac{2x}{2\cos 2\alpha + 1}.$$

С другой стороны, BF равен $(x - a)$. Поэтому второе уравнение, которое можно составить, имеет вид

$$\frac{2x}{2\cos 2\alpha + 1} = x - a$$

или

$$x\cdot\frac{2\cos 2\alpha-1}{2\cos 2\alpha+1}=a. \qquad (2)$$

Систему уравнений (1—2) легко разрешить относительно x и $\cos 2\alpha$:

$$x=5a,\ \cos 2\alpha=\frac{3}{4}.$$

Теперь легко находится площадь треугольника ABC:

$$S_{ABC}=\frac{1}{4}x^2\operatorname{tg}2\alpha=\frac{25\sqrt{7}}{12}a^2.$$

Ответ: $25\sqrt{7}a^2/12$.

Задача 5: Чертеж к этой задаче дан на рис. 58. Пусть O — центр искомого шара, а OP и OQ его радиусы, проведенные в точки касания P и Q соответственно; радиус шара — R.

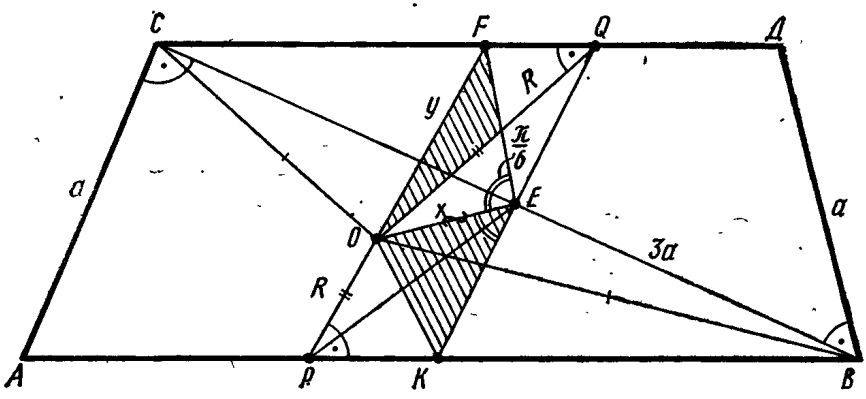


Рис. 58.

Прежде всего заметим, что центр шара, точка O, равноудалена от точек B и C, т. е. треугольник OBC — равнобедренный. Действительно, рассмотрев два прямоугольных треугольника OPB и OQC, замечаем, что они равны по двум катетам: $OP=OQ=R$ и $BP=CQ=2\cdot AB/3$ (очевидно, что $AB=CD$). Отсюда и следует равенство $OB=OC$.

Покажем теперь, что плоскость треугольника OBC является биссекторной плоскостью двугранного угла между плоскостями исходных треугольников ABC и BCD. Для этого соединим вершину треугольника OBC, точку O, с серединой ребра E этого двугранного угла. Поскольку треугольник OBC равнобедренный, то $OE\perp BC$. Далее, восставим перпендикуляры EK и EF в плоскостях треугольников ABC и BCD соответственно. Очевидно, что точки K и F будут серединами гипотенуз AB и CD, поскольку отрезки EK и EF будут средними линиями, проведенными в прямоугольных треугольниках ABC и BCD параллельно катетам. Треугольники OPK и OQF равны по двум катетам. Отсюда следует, что $OK=$

$=OF$. Треугольники OEF и OEK так же равны между собой: $OK=OF$, OE — общая сторона, $EK=EF=a/2$. Следовательно, угол OEK равен углу OEF. Кроме того, очевидно, что угол KEF является плоским углом двугранного угла между плоскостями треугольников ABC и BCD. Таким образом, доказано, что плоскость треугольника OBC делит этот двугранный угол пополам; угол OEF равен $\pi/6$.

Перейдем к вычислениям. Обозначим отрезок OE через x, а отрезок OF — через y. Из прямоугольных треугольников OCQ и OCE выразим и приравняем друг другу выражения для OC:

$$OC^2=R^2+\left(\frac{2\sqrt{10}a}{3}\right)^2=x^2+\left(\frac{3a}{2}\right)^2. \qquad (1)$$

Здесь учтено, что $CD=a\sqrt{10}$, а $CD=2a\sqrt{10}/3$.

С помощью теоремы косинусов выразим y из треугольника OEF, в котором угол OEF равен $\pi/6$:

$$y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+x^2-2\cdot\frac{a}{2}\cdot x\cdot\cos\frac{\pi}{6}. \qquad (2)$$

Из прямоугольного треугольника OQF имеем

$$y^2=R^2+QF^2=R^2+\left(\frac{2a\sqrt{10}}{3}-\frac{a\sqrt{10}}{2}\right)^2,$$

$$y^2=R^2+\frac{5a^2}{18}. \qquad (3)$$

Исключая из полученных уравнений (1—3) R и y, находим значение неизвестной величины x:

$$R^2=x^2-2\cdot\frac{a}{2}\cdot x\cdot\cos\frac{\pi}{6}-\frac{5a^2}{18},$$

$$x^2-2\cdot\frac{a}{2}\cdot x\cdot\cos\frac{\pi}{6}-\frac{5a^2}{18}+\left(\frac{2a\sqrt{10}}{3}\right)^2=x^2+\left(\frac{3a}{2}\right)^2,$$

$$x=\frac{13a\sqrt{3}}{9}.$$

После этого весьма просто вычисляется радиус шара R:

$$R^2=x^2+\left(\frac{3a}{2}\right)^2-\left(\frac{2a\sqrt{10}}{3}\right)^2,$$

$$R=a\sqrt{\frac{439}{108}}.$$

Ответ: $R=a\sqrt{439/108}$.

§ 28. ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ, 1972 г.

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$9^{1-(x-1)^2} - 12 \cdot 3^{-(x-1)^2} + 1 = 0.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \geqslant \frac{|\operatorname{tg} x - \sqrt{3}| + \sqrt{3}}{\operatorname{ctg} x}.$$

3. В прямоугольном секторе AOB из точки B, как из центра, проведена дуга $\overset{\smile}{OC}$ (C — точка пересечения этой дуги с дугой $\overset{\smile}{AB}$) радиуса BO. Окружность S_1 касается дуги $\overset{\smile}{AB}$, дуги $\overset{\smile}{OC}$ и прямой OA, а окружность S_2 касается дуги $\overset{\smile}{AB}$, прямой OA и окружности S_1. Найти отношение радиуса окружности S_1 к радиусу окружности S_2.

4. Боковые грани правильной треугольной пирамиды $SABC$ наклонены к плоскости основания под углом 45°. Шар касается плоскости основания ABC в точке A и, кроме того, касается вписанного в пирамиду шара. Через центр первого шара и высоту BD основания проведена плоскость. Найти угол наклона этой плоскости к плоскости основания.

5. Найти все действительные значения параметра a, при которых неравенство

$$\operatorname{tg}^2(\sin\sqrt{9\pi^2 - x^2}) - 2a\operatorname{tg}(\sin\sqrt{9\pi^2 - x^2}) + a + 2 \leqslant 0$$

имеет и притом конечное число решений. Для каждого такого a указать все решения неравенства.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$4^{1-(x+1)^2} - 3 \cdot 2^{2-(x+1)^2} + 7 = 0.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \cos 2x) \geqslant \sin x \cdot (1 + |1 - \sqrt{2}\sin x|).$$

3. В прямоугольном секторе AOB проведена хорда AB и в образовавшийся сегмент вписан квадрат. Найти отношение стороны квадрата к радиусу окружности, которая касается хорды AB, дуги $\overset{\smile}{AB}$ и стороны квадрата, перпендикулярной к хорде AB.

4. Шар касается плоскости основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ в точке A и, кроме того, касается вписанного в пирамиду шара. Через центр первого шара и сторону основания BC проведена секущая плоскость. Найти угол наклона этой плоскости к плоскости основания, если известно, что диагонали сечения перпендикулярны ребрам SA и SD.

5. Найти все действительные значения параметра a, при которых неравенство

$$\sqrt{3\pi - 2|x|} \cdot \left[\operatorname{ctg}^2(\cos x) + a \operatorname{ctg}(\cos x) + \frac{a}{2}\right] \leqslant 0$$

имеет и притом конечное число решений. Для каждого такого a указать все решения неравенства.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$9^{1-(x+2)^2} - 2 \cdot 3^{2-(x+2)^2} + 7 = 0.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \geqslant \frac{|\operatorname{ctg} x - 1| + 1}{\operatorname{tg} x}.$$

3. В прямоугольном секторе AOB из точки B как из центра проведена дуга $\overset{\smile}{OC}$ (C — точка пересечения этой дуги с дугой $\overset{\smile}{AB}$) радиуса BO. Окружность S_1 касается дуги $\overset{\smile}{AB}$, дуги $\overset{\smile}{OC}$ и прямой OA, а окружность S_2 касается дуги $\overset{\smile}{OC}$, прямой OA и окружности S_1. Найти отношение радиуса окружности S_1 к радиусу окружности S_2.

4. Боковые ребра правильной треугольной пирамиды $SABC$ наклонены к плоскости основания под углом 45°. Шар касается плоскости основания ABC в точке A и, кроме того, касается продолжения ребра BS за вершину S. Через центр шара и высоту BD основания проведена плоскость. Найти угол наклона этой плоскости к плоскости основания.

5. Найти все действительные значения параметра a, при которых неравенство

$$\operatorname{tg}^2(\cos\sqrt{4\pi^2 - x^2}) - 4a \operatorname{tg}(\cos\sqrt{4\pi^2 - x^2}) + 2 + 2a \leqslant 0$$

имеет и притом конечное число решений. Для каждого такого a указать все решения неравенства.

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$4^{1-(x-2)^2} - 2^{3-(x-2)^2} + 1 = 0.$$

2. Решить неравенство

$$1 + \cos 2x \geqslant \cos x \cdot (1 + |1 - 2\cos x|).$$

3. В прямоугольном секторе AOB проведена хорда AB. Окружность S_1 с центром на биссектрисе сектора касается хорды AB и дуги $\overset{\smile}{AB}$. Окружность S_2 касается хорды AB, дуги $\overset{\smile}{AB}$ и окружности S_1. Окружность S_3, отличная от S_1, касается хорды AB, дуги $\overset{\smile}{AB}$ и окружности S_2. Найти отношение радиуса окружности S_2 к радиусу окружности S_3.

4. Шар касается плоскости основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ в точке A и, кроме того, касается ребра SC. Через центр этого шара и сторону основания BC проведена секущая плоскость. Найти угол наклона этой плоскости к плоскости основания, если плоскость сечения перпендикулярна грани ASD.

5. Найти все действительные значения параметра a, при которых неравенство

$$\sqrt{2\pi - |x|} \cdot [\operatorname{ctg}^2(\sin x) - 2a \operatorname{ctg}(\sin x) - a] \leqslant 0$$

имеет и притом конечное число решений. Для каждого такого a указать все решения неравенства.

Разбор варианта 1

Задача 1. Введем новую неизвестную посредством равенства

$$t = 3^{-(x-1)^2}.$$

Очевидно, что эта неизвестная может принимать только положительные значения. Уравнение примет вид

$$9t^2 - 12t + 1 = 0.$$

Его решения: $t = (2 \pm \sqrt{3})/3$. Возвращаясь к прежней переменной, получим:

$$3^{-(x-1)^2} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{3}$$

или

$$(x-1)^2 = -\log_3 \frac{2 \pm \sqrt{3}}{3}.$$

Очевидно, что правая часть этого уравнения должна быть неотрицательной. Поэтому нужно взять лишь то значение логариф-

ма, стоящего в правой части последнего равенства, которое отрицательно. Имеем

$$(x-1)^2 = -\log_3 \frac{2-\sqrt{3}}{3}$$

и далее

$$|x-1| = \sqrt{1-\log_3(2-\sqrt{3})},$$

$$x = 1 \pm \sqrt{1-\log_3(2-\sqrt{3})}.$$

Заметим, что решению можно придать и другую форму записи:

$$x = 1 \pm \sqrt{1+\log_3(2+\sqrt{3})}.$$

Ответ: $1 \pm \sqrt{1-\log_3(2-\sqrt{3})}$.

Задача 2. Очевидно, что в данном неравенстве допустимы все значения неизвестного, для которых $\sin x \neq 0$ и $\cos x \neq 0$, т. е. $x \neq \pi n/2$.

Обозначим $\operatorname{tg} x$ буквой t и запишем неравенство в следующем виде:

$$t^2 \geqslant t\,[\sqrt{3} + |t-\sqrt{3}|] \quad (t \neq 0)$$

или

$$t\,[(t-\sqrt{3}) - |t-\sqrt{3}|] \geqslant 0.$$

Рассмотрим три случая.

1. $t \geqslant \sqrt{3}$.

Тогда неравенство тождественно выполняется ($|t-\sqrt{3}| = t-\sqrt{3}$). Поэтому все $t \geqslant \sqrt{3}$ являются его решениями.

2. $0 < t < \sqrt{3}$.

В этом случае неравенство принимает вид

$$2t\,(t-\sqrt{3}) \geqslant 0.$$

Поскольку сомножители имеют разные знаки, неравенство при рассматриваемых значениях t не выполняется.

3. $t < 0$

В этом случае имеем

$$2t\,(t-\sqrt{3}) \geqslant 0.$$

Очевидно, что при всех $t < 0$ неравенство выполнено.

Итак, подводя итог, получаем

а) $t \geqslant \sqrt{3}$; б) $t < 0$.

Возвращаясь к прежней переменной, находим

а) $\operatorname{tg} x \geqslant \sqrt{3}$, $\frac{\pi}{3}+\pi n < x < \frac{\pi}{2}+\pi n$;

б) $\operatorname{tg} x < 0$, $-\frac{\pi}{2}+\pi n < x < \pi n$.

Ответ: $\frac{\pi}{3}+\pi n < x < \frac{\pi}{2}+\pi n$; $-\frac{\pi}{2}+\pi n < x < \pi n$.

Задача 3. Чертеж к этой задаче дан на рис. 59. Центр первой окружности обозначен буквой S_1, а центр второй окружности — буквой S_2. Кроме того, введены обозначения D и E — точки касания первой и второй окружности с прямой OA соответственно, а H и F — точки касания тех же окружностей с дугой AB. Радиус сектора AOB обозначим R, радиус первой окружности — r, радиус второй окружности — ρ.

Можно заметить, что задача имеет не одно решение. Окружность с центром в точке S'_2, вписанная в криволинейный треугольник AEH, также удовлетворяет всем условиям задачи. Поэтому, не предполагая единственности решения запишем условия, определяющие положение центра каждой из окружностей.

Окружность S_1 касается дуги $\overset{\frown}{AB}$; поэтому точки O, S_1 и H лежат на одной прямой и

$$OS_1 = R - r.$$

Эта же окружность касается прямой AO; поэтому расстояние от ее центра до этой прямой равно r. Отсюда находим длину отрезка OE:

$$OE = \sqrt{(R-r)^2 - r^2}.$$

Окружность S_1 касается также дуги $\overset{\frown}{OC}$; поэтому отрезок S_1B равен сумме радиусов r и R. Из рассмотрения прямоугольного треугольника BKS_1 можно составить уравнение:

$$(r+R)^2 = (R-r)^2 + [\sqrt{(R-r)^2 - r^2}]^2,$$

которое после простых преобразований приводит к соотношению

$$R = 6r,$$

дающему связь между радиусами r и R.

Рассмотрим теперь положение второй окружности. Эта окружность касается окружности S_1; поэтому расстояние между их центрами S_1S_2 равно $(r+\rho)$. Та же окружность касается отрезка OA; поэтому расстояние DS_2 равно ρ. Из прямоугольного треугольника DOS_2 находим:

$$OD = \sqrt{(R-\rho)^2 - \rho^2}.$$

Теперь можно определить расстояние между точками касания окружностей S_1 и S_2 прямой OA. В общем случае оно равно

$$DE = |\sqrt{(R-r)^2 - r^2} - \sqrt{(R-\rho)^2 - \rho^2}|.$$

Знак модуля показывает, что возможны случаи $OD < OE$ и $OD > OE$.

Из рассмотрения прямоугольного треугольника MS_1S_2, где точка M определяется пересечением отрезков KS_1 и DS_2, можно составить уравнение

$$(r+\rho)^2 = (\rho - r)^2 + [\sqrt{(R-r)^2 - r^2} - \sqrt{(R-\rho)^2 - \rho^2}]^2,$$

которое в более простом виде записывается так:

$$4r\rho = [\sqrt{R(R-2r)} - \sqrt{R(R-2\rho)}]^2.$$

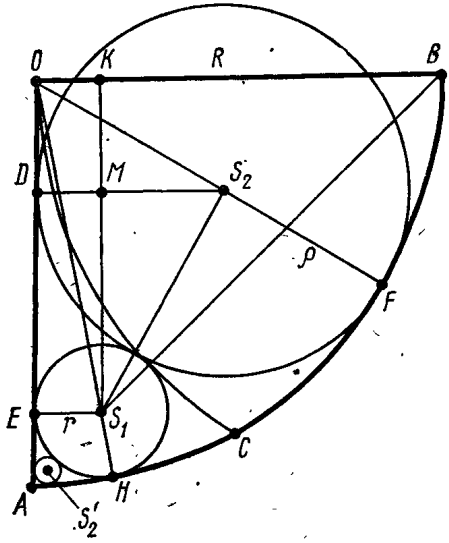


Рис. 59.

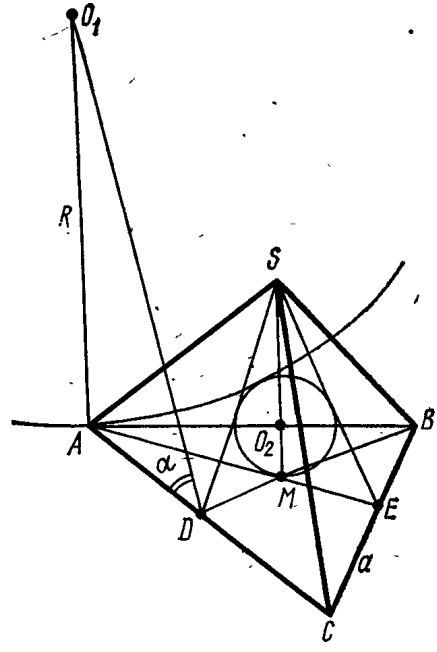


Рис. 60.

Разделим обе части последнего уравнения на r^2 и заменим всюду отношение R/r на 6. Получаем уравнение

$$4x = [\sqrt{6(6-2)} - \sqrt{6(6-2x)}]^2,$$

в котором через x обозначено отношение радиусов ρ/r. После несложных преобразований это уравнение сводится к квадратному уравнению

$$16x^2 - 48x + 9 = 0; \quad \left(0 < x < \frac{15}{4}\right),$$

решения которого

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{3}}{4}.$$

Таким образом, задача имеет два решения. Отношение радиусов окружностей равно величине, обратной по отношению к x:

$$\frac{r}{\rho}=\frac{4}{3}(2\pm\sqrt{3}).$$

Ответ: $4(2\pm\sqrt{3})/3$.

Задача 4. На рис. 60 изображена пирамида $SABC$, O_2 — центр вписанного в нее шара, а O_1 — центр шара, о котором идет речь в задаче. Поскольку шар O_1 касается основания пирамиды в точке A, то его центр лежит на перпендикуляре к плоскости основания, восстановленном из этой точки. Центр шара, вписанного в правильную пирамиду, лежит, очевидно, на ее высоте SM.

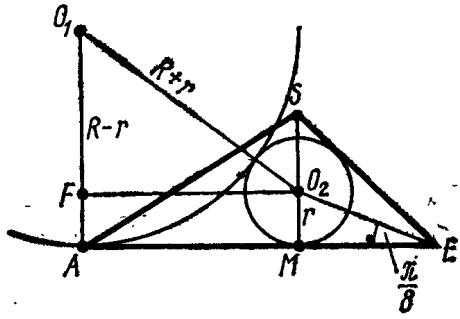


Рис. 61.

Соединим точки O_1 и D отрезком прямой. Прямые O_1D и BD определяют плоскость, угол которой с плоскостью основания надо найти. Этот угол, обозначаемый α, равен, очевидно, углу ADO_1. Поскольку $AD\perp BD$ и $AO_1\perp$ пл. ABC, по теореме о трех перпендикулярах $O_1D\perp BD$; следовательно, угол ADO_1 есть линейный угол двугранного угла между плоскостью сечения и плоскостью основания. Чтобы найти угол α, определим его тангенс:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{R}{a/2},$$

где a — ребро основания пирамиды, а R — радиус шара O_1.

Для того чтобы найти радиус шара R, обратимся к рис. 61, на котором представлен разрез пирамиды по плоскости AES. Радиус вписанного в пирамиду шара r находится из треугольника EMO_2. Линия EO_2 — биссектриса угла MES.

$$r=\frac{a\sqrt{3}}{6}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}.$$

Из прямоугольного треугольника O_1O_2F, в котором $O_1O_2=R+r$, $O_1F=R-r$ и $FO_2=a\sqrt{3}/3$, находим:

$$(R+r)^2=(R-r)^2+\frac{a^2}{3}$$

или

$$4rR=\frac{a^2}{3}.$$

Подставляя сюда выражение для радиуса вписанного шара r, получаем

$$R=\frac{a\sqrt{3}}{6}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}.$$

После этого определяем тангенс искомого угла

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}.$$

Котангенс угла $\pi/8$ можно найти путем следующих преобразований:

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{8}=\frac{\cos^2\frac{\pi}{8}}{\sin^2\frac{\pi}{8}}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{1-\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=3-2\sqrt{2}.$$

Отсюда

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}=\sqrt{3+2\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}(\sqrt{3}+\sqrt{6})/3$.

Задача 5. Введем новую переменную согласно равенству

$$\operatorname{tg}(\sin\sqrt{9\pi^2-x^2})=t.$$

Очевидно, что x изменяется в пределах: $-3\pi\leqslant x\leqslant 3\pi$; величина синуса при этом не превышает единицы: $|\sin\sqrt{9\pi^2-x^2}|\leqslant 1$, а значения тангенса и, значит, переменной t удовлетворяют ограничениям

$$-\operatorname{tg}1\leqslant t\leqslant\operatorname{tg}1. \qquad (1)$$

Для новой переменной имеем квадратное неравенство

$$t^2-2at+a+2\leqslant 0,$$

для существования решения которого необходимо условие неотрицательности его дискриминанта

$$D=a^2-a-2\geqslant 0.$$

Рассмотрим случай, когда дискриминант равен нулю. Это имеет место при $a=2$ и $a=-1$. В этом случае рассматриваемое неравенство имеет только одно решение:

а) $t=2$ при $a=2$;

б) $t=-1$ при $a=-1$,

В случае $a=2$ мы не получаем решений. Имеем

$$\operatorname{tg}\sin\sqrt{9\pi^2-x^2}=2,$$

$$\sin\sqrt{9\pi^2-x^2}=\operatorname{arctg}2+\pi k.$$

Поскольку $\operatorname{arctg} 2$ — возрастающая функция, то верна цепочка неравенств

$$\operatorname{arctg} 2 > \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} > 1, \text{ при } k = 0;$$

$$\operatorname{arctg} 2 - \pi < \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2} < -1 \text{ при } k = -1,$$

что показывает отсутствие действительности решений у этого уравнения. Остальные значения k, очевидно, не годятся.

В случае $a = -1$ получаем

$$\operatorname{tg} \sin \sqrt{9\pi^2 - x^2} = -1,$$

$$\sin \sqrt{9\pi^2 - x^2} = -\frac{\pi}{4} \quad (k = 0).$$

Поскольку $|\pi/4| < 1$, находим:

1) $\sqrt{9\pi^2 - x^2} = \pi + \arcsin \frac{\pi}{4}$,

2) $\sqrt{9\pi^2 - x^2} = 2\pi - \arcsin \frac{\pi}{4}$.

Как были найдены эти значения, легко понять из рис. 62. Решая далее полученные уравнения, определяем x:

$$x = \pm \sqrt{9\pi^2 - \left(\pi + \arcsin \frac{\pi}{4}\right)^2},$$

$$x = \pm \sqrt{9\pi^2 - \left(2\pi - \arcsin \frac{\pi}{4}\right)^2}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $D > 0$. Это имеет место при $a > 2$ и $a < -1$. В этом случае решения исходного неравенства записываются в следующем виде:

$$a - \sqrt{a^2 - a - 2} \leqslant t \leqslant a + \sqrt{a^2 - a - 2}. \qquad (2)$$

Сравнивая решения неравенства и ограничения (1), можно сделать вывод: для того, чтобы неравенство относительно x имело решение, необходимо, чтобы у неравенств (1) и (2) существовало хотя бы одно общее значение t. При этом если у обоих неравенств существует бесконечно много общих решений, то существует бес-

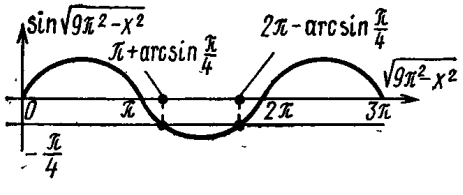


Рис. 62.

конечно много значений x, удовлетворяющих исходному неравенству.

Для того чтобы у неравенств (1) и (2) было конечное число общих решений, необходимо выполнение одного из двух равенств:

1) $a-\sqrt{a^2-a-2}=\operatorname{tg} 1$;

2) $a+\sqrt{a^2-a-2}=-\operatorname{tg} 1$.

Первое уравнение выполняется, очевидно, только при $a>2>\operatorname{tg} 1$.

Его решение имеет вид

$$a=\frac{\operatorname{tg}^2 1+2}{2\operatorname{tg} 1-1}.$$

Легко проверить, что это значение a действительно больше 2:

$$\frac{\operatorname{tg}^2 1+2}{2\operatorname{tg} 1-1}>2,$$

$$(\operatorname{tg} 1-2)^2>0.$$

Здесь было использовано неравенство

$$\operatorname{tg}\alpha>\alpha,$$

выполняющееся для

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

Второе уравнение может выполняться только при $a<-\operatorname{tg} 1<-1$. Однако после возведения в квадрат обеих его частей получаем

$$a=-\frac{\operatorname{tg}^2 1+2}{2\operatorname{tg} 1+1}.$$

Покажем, что это посторонний корень уравнения. Действительно,

$$-\frac{\operatorname{tg}^2 1+2}{2\operatorname{tg} 1+1}<-\operatorname{tg} 1,$$

$$\operatorname{tg}^2 1+\operatorname{tg} 1-2<0.$$

Последнее неравенство в силу неравенства $\operatorname{tg} 1>1$ противоречиво.

Итак, получаем

$t=\operatorname{tg} 1$ при $a=\frac{\operatorname{tg}^2 1+2}{2\operatorname{tg} 1-1}$.

Отсюда находим (рис. 62):

1) $\sqrt{9\pi^2-x^2}=\frac{\pi}{2}$;

2) $\sqrt{9\pi^2-x^2}=\frac{5\pi}{2}$.

Окончательно

$$x = \pm \frac{\sqrt{32\pi}}{2};$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{11\pi}}{2}.$$

Ответ: $a = -1$, $a = \frac{\operatorname{tg}^2 1 + 2}{2\operatorname{tg} 1 - 1}$.

§ 29. ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ, 1973 г.

Вариант 1

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2\sin x \sin y + \cos x = 0 \\ 1 + \sin y \cos x = 2\cos^2 y \sin x. \end{cases}$$

2. Решить неравенство

$$\log_{\frac{x^2-18x+91}{90}} \left(5x - \frac{3}{10}\right) \leqslant 0.$$

3. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена биссектриса CL и медиана CM. Найти площадь треугольника ABC, если $LM = a$, $CM = b$.

4. Вершина S пирамиды $SABC$ находится на расстоянии 4 от центра сферы радиуса 1, которая проходит через точки A, B, C и пересекает ребра SA, SB, SC соответственно в точках A', B', C'. Отношение длин отрезков $B'C'$ и BC равно $\sqrt{132}/15$, отношение площадей треугольников $SA'B'$ и SAB равно $^{22}/_{45}$, а отношение объемов пирамид $SA'B'C'$ и $SABC$ равно $^{88}/_{225}$.

Найти длины отрезков SA', SB', SC'.

5. Из пункта А одновременно выходят три пешехода и одновременно возвращаются в тот же пункт, обойдя маршрут, состоящий из прямолинейных отрезков AB, BC, CD, DA, которые образуют разнобочную трапецию (AB, CD — боковые стороны). На указанных отрезках скорости всех пешеходов постоянны и равны у первого 6, 8, 5 и 8 *км/ч* соответственно, у второго — 7, 7, 6 и 8 *км/ч* соответственно. Скорость третьего пешехода на каждом из отрезков равна либо 7 *км/ч*, либо 8 *км/ч*, причем на всем пути он меняет скорость один раз.

Определить отношение меньшего основания трапеции к боковой стороне.

Вариант 2

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin y \cos x + \sin x = 0 \\ 2\cos^2 y + \sin y \sin x = \cos 2y \cos x. \end{cases}$$

2. Решить неравенство

$$\log_{2x-\frac{4}{25}}\left(\frac{x^2-14x+51}{50}\right) \leqslant 0.$$

3. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведены биссектриса $CL=a$ и медиана $CM=b$. Найти площадь треугольника ABC.

4. Точки A, B, C, D, E, F лежат на сфере радиуса $\sqrt{2}$. Отрезки AD, BE и CF пересекаются в точке S, находящейся на расстоянии 1 от центра сферы. Объемы пирамид $SABC$ и $SDEF$ относятся, как 1 : 9, пирамид $SABF$ и $SDEC$ — как 4 : 9, пирамид $SAEC$ и $SDBF$ — как 9 : 4. Найти отрезки SA, SB, SC.

5. Из пункта A одновременно стартуют три бегуна и одновременно финишируют в том же пункте, пробежав по маршруту, состоящему из прямолинейных отрезков AB, BC, CA, образующих треугольник ABC. На каждом из указанных отрезков скорости бегунов постоянны и равны у первого 10, 16 и 14 *км/ч* соответственно, у второго — 12, 10 и 16 *км/ч* соответственно. Третий бегун в пунктах B и C оказывается не один и меняет скорость на маршруте один раз.

Установить, является ли треугольник ABC остроугольным или тупоугольным.

Вариант 3

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2\cos x \sin y + \sin x = 0 \\ \frac{1}{2} - \sin 2y \cos x = \sin x \cos y + \cos x. \end{cases}$$

2. Решить неравенство

$$\log_{\frac{x^2-10x+31}{30}}\left(5x - \frac{11}{20}\right) \leqslant 0.$$

3. В прямоугольном треугольнике ABC высота, опущенная на гипотенузу, равна a, а биссектриса прямого угла равна b. Найти площадь треугольника ABC.

4. Сфера проходит через точки A, B, C, D и пересекает отрезки SA, SB, SC, SD в точках A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно. Известно, что $SD_1=\frac{9}{4}$; $DD_1=\frac{47}{36}$, отношение площадей треугольников SA_1B_1 и SAB равно $\frac{15}{32}$, отношение объемов пирамид $SB_1C_1D_1$ и $SBCD$ равно $\frac{1701}{4096}$, а отношение объемов пирамид $SA_1B_1C_1$ и $SABC$ равно $\frac{105}{256}$.

Найти отрезки SA_1, SB_1 и SC_1.

5. Три пешехода одновременно выходят из пункта A и одновременно прибывают в пункт D, пройдя по маршруту, состоящему из прямолинейных отрезков AB, BC, CA, AD (ABCD — параллелограмм). На каждом из этих отрезков скорости всех пешеходов постоянны и равны у первого 3, 6, 5 и 8 *км/ч* соответственно, у второго — 4, 5, 6 и 7 *км/ч* соответственно. Скорость третьего пешехода на отрезке AD равна 8 *км/ч*, а на остальных отрезках совпадает либо со скоростью первого, либо со скоростью второго на соответствующем отрезке, однако, ни с тем, ни с другим он не проходит весь маршрут целиком.

Установить, является ли угол ABC острым или тупым.

Вариант 4

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x\cos y+\cos x=0 \\ 2\sin^2 y-\cos y\cos x=\cos 2y\sin x. \end{cases}$$

2. Решить неравенство

$$\log_{4x-\frac{7}{25}}\left(\frac{x^2-16x+65}{64}\right)\leqslant 0.$$

3. В прямоугольном треугольнике ABC проведена биссектриса прямого угла CL. Из вершины A ($\angle A>45°$) на CL опущен перпендикуляр AD. Найти площадь треугольника ABC, если $AD=a$, $CL=b$.

4. Точки A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1 лежат на сфере. Отрезки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 пересекаются в точке S, которая делит отрезок DD_1 пополам. Известно, что $DD_1=2\sqrt{6}$, отношение радиусов вписанных окружностей треугольников SB_1C и SBC_1 равно $\frac{8}{7}$, отношение объемов пирамид $SABC$ и $SA_1B_1C_1$ равно $\frac{2450}{2187}$, а отношение объемов пирамид SA_1BD и SAB_1D_1 равно $\frac{196}{225}$.

Найти отрезки SA, SB, SC.

5. Три бегуна одновременно стартуют в пункте A и одновременно финишируют в том же пункте, пробежав по маршруту, состоящему из прямолинейных отрезков AB, BC, CM, MA (ABC — треугольник, M — середина отрезка AB).

На каждом из указанных отрезков скорости всех бегунов постоянны и равны у первого $13\frac{5}{7}$, 10, 10, 16 *км/ч* соответственно, у второго — $12\frac{12}{13}$; 14, 12, 14 *км/ч* соответственно. Третий бегун на участке BC бежит рядом с одним из других бегунов, на участке MA его скорость та же, что на участке AB, причем на всем пути меняет скорость не более, чем дважды. Определить, является ли угол ABC острым или тупым.

Разбор варианта 1

Задача 1. Перепишем данную систему в следующем виде:

$$\begin{cases} 2\sin y \sin x + \cos x = 0 \\ 2\cos^2 y \sin x - \sin y \cos x = 1. \end{cases}$$

Будем рассматривать эту систему как систему двух линейных уравнений относительно функций $\sin x$ и $\cos x$. Ее определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2\sin y & 1 \\ 2\cos^2 y & -\sin y \end{vmatrix} = -2(\sin^2 y + \cos^2 y) = -2$$

всегда отличен от нуля, и поэтому система имеет единственное относительно функций $\sin x$ и $\cos x$ решение.

Умножая первое уравнение системы на $\sin y$ и складывая результат со вторым уравнением, получим

$$\sin x = \frac{1}{2}.$$

Для нахождения решения можно было бы выразить из системы $\cos x$ и потребовать, чтобы выполнялось тождество

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Это дало бы уравнение для нахождения величины y. Поступим, однако, по-другому. Подставляя в систему уравнений найденное значение $\sin x$, получим

$$\begin{cases} \sin y + \cos x = 0 \\ \cos^2 y - \sin y \cos x = 1. \end{cases}$$

Второе уравнение системы выполняется в силу первого уравнения. Поэтому имеем

$$\sin y = -\cos x.$$

Возможны два случая:

1) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k.$

Тогда

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$y = -(-1)^m \frac{\pi}{3} + \pi m;$$

2) $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k.$

Тогда

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$y = (-1)^m \cdot \frac{\pi}{3} + \pi m.$$

Поэтому исходная система уравнений имеет следующие решения:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ y = (-1)^{m+1} \frac{\pi}{3} + \pi m;\quad x + \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,$$

$$y = (-1)^m \frac{\pi}{3} + \pi m.$$

Здесь k и m принимают независимо друг от друга все целочисленные значения.

Задача 2. Определим сначала область допустимых значений. Она получается путем совместного решения системы неравенств

$$\begin{cases} 5x - \frac{3}{10} > 0, \\ x^2 - 18x + 91 > 0, \\ x^2 - 18x + 91 \neq 90, \end{cases}$$

откуда находим

$$x > 9 + 4\sqrt{5} \text{ и } 9 - 4\sqrt{5} < \frac{3}{50} < x < 9 + 4\sqrt{5}.$$

Рассмотрим два случая. Если в основании логарифма стоит число, большее единицы,

$$x^2 - 18x + 91 > 90,$$

$$x > 9 + 4\sqrt{5},$$

то неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x > 9 + 4\sqrt{5}, \\ 5x - \frac{3}{10} \leqslant 1. \end{cases}$$

Эта система не имеет решений.

Во втором случае, когда основание логарифма меньше единицы, получается система

$$\begin{cases} \frac{3}{50} < x < 9 + 4\sqrt{5}, \\ 5x - \frac{3}{10} \geqslant 1, \end{cases}$$

решение которой

$$\frac{13}{50} \leqslant x < 9 + 4\sqrt{5}.$$

Ответ: $0{,}26 \leqslant x < 9 + 4\sqrt{5}$.

Задача 3. Пусть ABC — рассматриваемый прямоугольный треугольник (рис. 63). Точка M, середина гипотенузы AB, является центром описанной вокруг треугольника ABC окружности. Поэтому медиана CM есть радиус этой окружности. Отрезок ML всегда меньше половины гипотенузы, откуда следует требование о том, что $a < b$.

Отрезок AL равен $b + a$, отрезок BL равен $b - a$. Обозначим катет AC буквой x, а катет BC — y. Составим систему уравнений

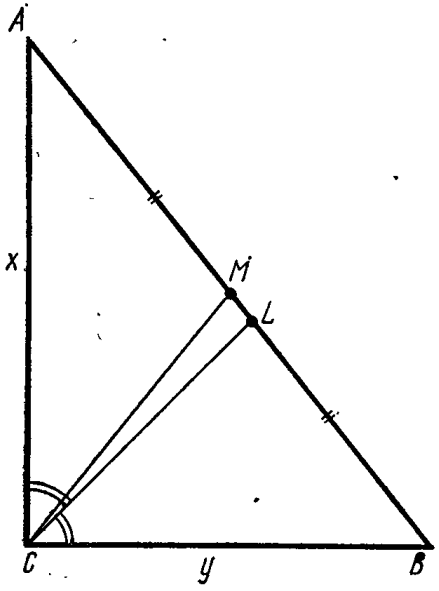


Рис. 63.

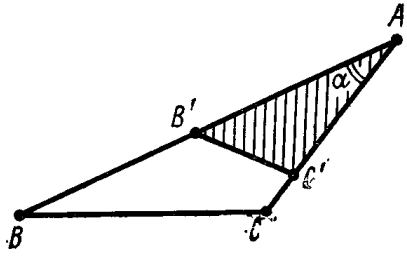


Рис. 64.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4b^2, \\ \frac{x}{y} = \frac{b+a}{b-a}. \end{cases}$$

Первое из этих уравнений выражает теорему Пифагора, а второе — свойство биссектрисы делить противоположную сторону в отношении, пропорциональном сторонам треугольника.

Опуская подробности решения этой системы, которые легко выполнить самостоятельно, приведем окончательный результат

$$x=\frac{\sqrt{2}\,b\,(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}};\quad y=\frac{\sqrt{2}\,b\,(b-a)}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Отсюда находим площадь треугольника ABC:

$$S_{ABC}=\frac{b^2\,(b^2-a^2)}{a^2+b^2},\quad b>a.$$

Задача 4. Замечание. Прежде чем приступить к решению этой задачи, рассмотрим некоторые вспомогательные утверждения, которые будут полезны для решения этой, а также многих других задач.

1. Рассмотрим треугольник ABC (рис. 64). Если сторону треугольника AB изменить в m раз, а сторону AC — в n раз, т. е. перейти к треугольнику $AB'C'$ такому, что

$$AB'=m\cdot AB,\quad AC'=n\cdot AC,$$

то площадь треугольника изменится в mn раз:

$$\boxed{S_{\triangle AB'C'}=mnS_{\triangle ABC}}.$$

Здесь числа m и n произвольны; они могут быть меньше или больше 1.

Справедливость этого утверждения легко следует из следующих равенств:

$$S_{\triangle AB'C'}=\frac{1}{2}AB'\cdot AC'\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}(mAB)\,(nAC)\sin\alpha=mnS_{\triangle ABC}.$$

В частности, при $m=n$ получается известное для подобных треугольников утверждение: площади подобных треугольников относятся как квадраты сходственных сторон.

2. Рассмотрим теперь произвольную треугольную пирамиду $SABC$ (рис. 65). Если ребро пирамиды SA изменить в m раз, ребро SB — в n раз, а ребро SC — в k раз, т. е. перейти к пирамиде $SA'B'C'$ такой, что

$$SA'=m\cdot SA,\ SB'=n\cdot SB,\ SC'=k\cdot SC,$$

то объем пирамиды изменится в mnk раз:

$$\boxed{V_{SA'B'C'}=mnkV_{SABC}}.$$

Числа, m, n, k как и раньше, могут быть меньше или больше 1.

Действительно, представим объем каждой из пирамид по формулам

$$V_{SA'B'C'}=\frac{1}{3}S_{\triangle SB'C'}\cdot h',\quad V_{SABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle SBC}\cdot h,$$

где h' и h — высоты каждой из пирамид, опущенные на боковые грани из вершин A' и A соответственно. Составляя отношение

объемов пирамид, находим

$$\frac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}} = \frac{S_{\triangle SB'C'}}{S_{\triangle SBC}} \cdot \frac{h'}{h} = nk\frac{h'}{h}.$$

Отношение высот $h' : h$ равно m. Это следует из рассмотрения подобных треугольников $A'D'S$ и ADS. Таким образом,

$$\frac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}} = mnk,$$

и утверждение доказано.

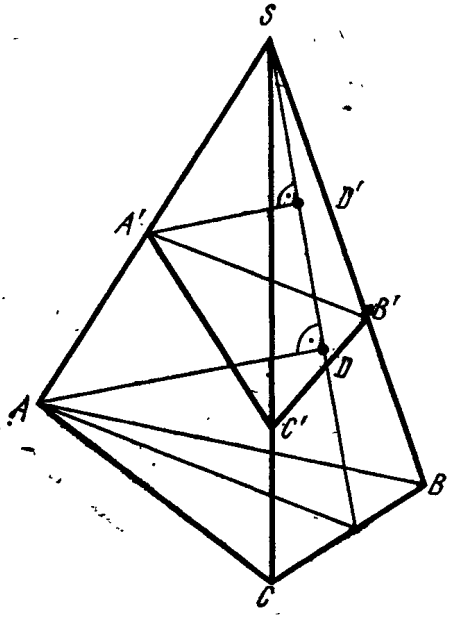


Рис. 65.

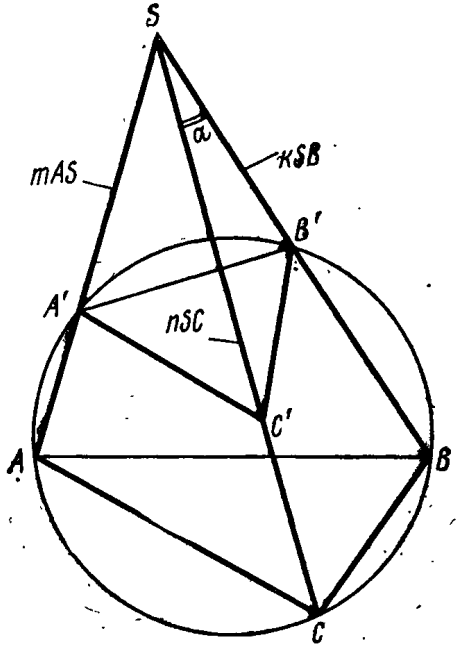


Рис. 66.

Перейдем теперь к решению задачи из варианта, рис. 66. Обозначим отношение сторон $A'S : AS$ через m, $B'S : BS$ — через k, $C'S : CS$ — через n. Тогда согласно сказанному выше получим

$$mnk = \frac{88}{225}, \quad mk = \frac{22}{45}.$$

Отсюда, в частности, следует, что $n = {}^4/_5$.

Заметим, что ребра пирамиды $SABC$ представляют собой секущие, проведенные к шару из одной внешней точки, а ребра пирамиды $SA'B'C'$ представляют собой внешние части этих секущих. Если учесть, что расстояние от вершины S до центра шара рав-

но 4, расстояние до максимально удаленной точки шара — 5, а до минимально удаленной точки шара равно 3, то по теореме о секущих получим:

$$SA' \cdot SA = 15,\ SB' \cdot SB = 15,\ SC' \cdot SC = 15$$

или

$$m \cdot SA^2 = 15,\ k \cdot SB^2 = 15,\ n \cdot SC^2 = 15.$$

Поскольку $n = 4/5$, то $SC = \sqrt{75/4}$. Отсюда находим

$$SC' = \frac{4}{5} SC = \sqrt{12}.$$

Рассмотрим треугольники $SB'C'$ и SBC, общий угол при вершине которых обозначим α. По теореме косинусов находим

$$(B'C')^2 = (SB')^2 + (SC')^2 - 2(SB')(SC')\cos\alpha,$$

$$BC^2 = SB^2 + SC^2 - 2SB \cdot SC \cdot \cos\alpha.$$

Эти соотношения можно переписать так:

$$(B'C')^2 = k^2 SB^2 + n^2 SC^2 - 2knSB \cdot SC \cos\alpha,$$

$$BC^2 = SB^2 + SC^2 - 2SB \cdot SC \cos\alpha.$$

Представляя в первое неравенство SB и SC, получим

$$(B'C')^2 = 15k + 15n - 30\sqrt{kn}\cos\alpha,$$

$$BC^2 = \frac{15}{k} + \frac{15}{n} - \frac{30}{\sqrt{kn}}\cos\alpha.$$

Отсюда находим

$$BC^2 = \frac{(B'C')^2}{kn} \text{ или } \frac{B'C'}{BC} = \sqrt{kn}.$$

По условию $B'C' : BC = \sqrt{132}/15$. Значит, $kn = 132/225$. Поскольку $n = 4/5$, то $k = 11/15$. Далее находим SB:

$$SB^2 = \frac{15}{k} = \frac{225}{11},\quad SB = \frac{15}{\sqrt{11}}$$

и, наконец, находим SB':

$$SB' = k \cdot SB = \sqrt{11}.$$

Поскольку $mnk = 88/225$, $n = 4/5$, $k = 11/15$, то $m = 2/3$. Далее находим SA:

$$SA^2 = \frac{15}{m} = \frac{45}{2},\quad SA = \frac{3}{2}\sqrt{10}$$

и отрезок SA':

$$SA' = m \cdot SA = \sqrt{10}.$$

Ответ: $\sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}$.

Задача 5. Обозначим стороны трапеции $ABCD$ (рис. 67) через x, y, x и z соответственно. Тогда условие о том, что первый и второй пешеходы пройдут весь путь за одно и то же время, запишется в виде уравнения:

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{8}+\frac{x}{5}+\frac{z}{8}=\frac{x}{7}+\frac{y}{7}+\frac{x}{6}+\frac{z}{8},$$

из которого находим

$$\frac{72}{1260}\cdot x=\frac{1}{56}\cdot y$$

или

$$\frac{y}{x}=\frac{16}{5}.$$

Второе условие сразу нельзя записать в виде одного уравнения: неизвестно, на каких участках какие были скорости. Поэтому рассмотрим все возможные случаи. Их шесть:

1) $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}+\frac{x}{5}+\frac{z}{8}=\frac{x}{7}+\frac{x+y+z}{8}$,

2) $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}+\frac{x}{5}+\frac{z}{8}=\frac{x+y}{7}+\frac{x+z}{8}$,

3) $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}+\frac{x}{5}+\frac{z}{8}=\frac{x+y+x}{7}+\frac{z}{8}$,

4) $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}+\frac{x}{5}+\frac{z}{8}=\frac{x}{8}+\frac{y+x+z}{7}$,

5) $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}+\frac{x}{5}+\frac{z}{8}=\frac{x+y}{8}+\frac{x+z}{7}$,

6) $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}+\frac{x}{5}+\frac{z}{8}=\frac{x+y+x}{8}+\frac{z}{7}$.

Здесь использовано условие, что скорость менялась только один раз.

Первое уравнение противоречиво. Из второго уравнения находим $y/x={}^{83}/_{15}$, что противоречит выше полученному соотношению. Из третьего уравнения находим $y/x={}^{68}/_{15}$, что также противоречит этому соотношению. Из четвертого уравнения получаем $z/x={}^{7}/_{3}$, из пятого — $z/x={}^{83}/_{15}$, из шестого — $z/x={}^{98}/_{15}$.

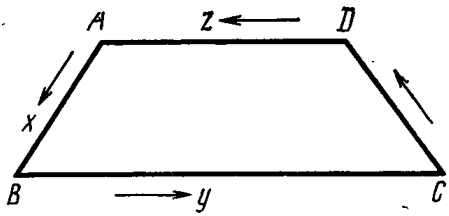


Рис. 67.

Рассмотрим три последних вывода. Они не противоречат условию $y/x={}^{16}/_{5}$. Однако проверим,

может ли при таком соотношении сторон существовать трапеция. Для существования трапеции необходимо

$$x+y+x \geqslant z,\ 2x+y \geqslant z$$

и

$$x+z+x \geqslant y,\ 2x+z \geqslant y,$$

т. е.

$$\frac{z}{x}-\frac{y}{x} \leqslant 2,\ \frac{y}{x}-\frac{z}{x} \leqslant 2.$$

Решения пятого и шестого уравнений не удовлетворяют этим условиям; решение четвертого уравнения дает ответ задачи. Поскольку $^7/_3 < {}^{16}/_5$, то меньшее основание трапеции — z.

Ответ: отношение меньшего основания к боковой стороне равно 7 : 3.

§ 30. ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ, 1974 г.

Вариант 1

1. Найти все решения уравнения

$$\sqrt{\sin(1-x)} = \sqrt{\cos x},$$

удовлетворяющие условию $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

2. Найти все действительные значения a, при которых каждое решение неравенства

$$\log_{0,5} x^2 \geqslant \log_{0,5}(x+2)$$

является решением неравенства $49x^2 - 4a^4 \leqslant 0$.

3. Найти все значения x, удовлетворяющие одновременно следующим условиям:

$$\begin{cases} |x-2|+|x-3|=1, \\ 813x - 974 \leqslant 163x^2. \end{cases}$$

4. Имеются три несообщающихся между собой резервуара, причем объем третьего не меньше объема второго. Первый резервуар имеет объем V и может быть заполнен первым шлангом за 3 *ч*, вторым шлангом — за 4 *ч*, третьим шлангом — за 5 *ч*. К каждому из резервуаров может быть подключен любой из этих трех шлангов. После того, как к каждому из резервуаров подключают по одному шлангу каким-либо способом, все шланги одновременно включаются. Как только какой-то резервуар наполнится, соответствующий шланг отключается и не может быть подключен в дальнейшем к другому резервуару. Заполнение считается оконченным, если наполнены все три резервуара. При самом быстром способе подключения заполнение окончится через 6 *ч*. Если бы все резер-

вуары сообщались, то заполнение окончилось бы через 4 *ч*. Найти объемы второго и третьего резервуаров.

5. В треугольной пирамиде $SABC$ сумма трех плоских углов при каждой вершине B и C равна 180° и $SA=BC$. Найти объем пирамиды, если площадь грани SBC равна 100 *см*^{2}, расстояние от центра описанного шара до плоскости основания ABC равно 3 *см*.

Вариант 2

1. Найти все решения уравнения

$$\sqrt{\sin x}=\sqrt{\cos(x+2)},$$

удовлетворяющие условию $0\leqslant x\leqslant 2\pi$.

2. Найти все действительные значения a, при которых каждое решение неравенства

$$0{,}5^{\frac{1}{2(x-1)^2}}\leqslant(0{,}25)^{\frac{1}{(3-x)^2}}$$

является решением неравенства $16a^4x^2-9\leqslant 0$.

3. Найти все значения x, удовлетворяющие одновременно следующим условиям:

$$\begin{cases}|x+5|=|x+2|+3,\\ 1114+279x\leqslant 139x^2.\end{cases}$$

4. В порту для загрузки танкеров имеются три трубопровода. По первому из них закачивается в час 300 *т* нефти, во второму — 400 *т*, по третьему — 500 *т*. Нужно загрузить два танкера. Если загрузку производить первыми двумя трубопроводами, подключив к одному из танкеров первый трубопровод, а к другому танкеру — второй, то загрузка обоих танкеров при наиболее быстром из двух возможных способов подключения займет 12 *ч*. При этом какой-то из танкеров, может быть, окажется заполненным раньше, и тогда подключенный к нему трубопровод отключается и в дальнейшей загрузке не используется. Если бы вместимость меньшего по объему танкера была вдвое больше, чем на самом деле, и загрузка производилась бы вторым и третьим трубопроводами, то при быстрейшем способе подключения загрузка заняла бы 14 *ч*. Определить, сколько тонн нефти вмещает каждый из танкеров.

5. В треугольной пирамиде $SABC$ суммы трех плоских углов при каждой вершине A, B и C равны 180°. Найти расстояние между скрещивающимися ребрами SA и BC, если известно, что $BC=4$ *см*, $AC=5$ *см*, $AB=6$ *см*.

Вариант 3

1. Найти все решения уравнения

$$\sqrt{\cos x}=\sqrt{\sin(x+2)},$$

удовлетворяющие условию $0\leqslant x\leqslant 2\pi$.

3. Найти все действительные значения a, при которых каждое решение неравенства

$$\log_{\frac{1}{3}}(21-x)\leqslant\log_{\frac{1}{3}}2x^2$$

является решением неравенства $9a^4-64x^2\geqslant 0$.

3. Найти все значения x, удовлетворяющие одновременно следующим условиям:

$$\begin{cases}|x+3|+|x-2|=5,\\ 818-135x\leqslant 137x^2.\end{cases}$$

4. Три самосвала, грузоподъемность первого из которых 12 *т*, второго — не меньше 2 *т*, а третьего — не меньше чем второго, должны быть загружены песком с помощью двух транспортеров. Первый транспортер загружает $^1/_2$ *т* песка в минуту, второй — $^2/_3$ *т* в минуту. Самосвалы могут подъезжать к транспортерам в любом порядке, причем загрузка одного самосвала может производиться только одним транспортером. Кроме того, начав загрузку при помощи одного из транспортеров, самосвал не может уже переехать на догрузку к другому. Время погрузки считается от начала загрузки первого самосвала до окончания загрузки последнего. При соблюдении этих условий минимальное время загрузки составляет 22,5 *мин*. Предполагается, что на смену у транспортера загруженного самосвала другим порожним самосвалом время не теряется. Если же все самосвалы загружаются с помощью лишь одного второго транспортера, то погрузка занимает 36 *мин*. Определить грузоподъемности второго и третьего самосвалов.

5. В треугольной пирамиде $SABC$ суммы трех плоских углов при каждой вершине S, A и B равны 180°, $SC=15$ *см* и $\angle ACB=60°$. Найти радиус описанного шара, если радиус вписанного шара равен 3 *см*.

Вариант 4

1. Найти все решения уравнения

$$\sqrt{\cos(x+1)}=\sqrt{\cos x},$$

удовлетворяющие условию $0\leqslant x\leqslant 2\pi$.

2. Найти все действительные значения a, при которых каждое решение неравенства

$$0{,}36^{\frac{1}{(3x+2)^2}} \leqslant (0{,}6)^{\frac{2}{(x+8)^2}}$$

является решением неравенства $25a^4x^2-4\leqslant 0$.

3. Найти все значения x, удовлетворяющие одновременно следующим условиям:

$$\begin{cases} |x-5| = 3+|x-2|, \\ 1186 - 199x \leqslant 197x^2. \end{cases}$$

4. Во дворце водного спорта есть два бассейна и две водопроводные линии для их заполнения. Первая линия заполняет в час объем $5V$, вторая линия — объем $6V$. К каждому бассейну можно подключить любую из линий. После того как подключение одним из двух возможных способов произведено, линии одновременно включаются. После заполнения какого-то бассейна соответствующая линия отключается и в дальнейшем для заполнения другого бассейна не используется. Заполнение считается оконченным, как только заполнятся два бассейна. Существует самый быстрый способ подключения линий, позволяющий заполнить оба бассейна за 8 *ч*. Если бы объем первого бассейна был увеличен вдвое, то заполнение можно было бы окончить самое быстрое за 10 *ч*. Определить объемы бассейнов, если известно, что объем первого бассейна не больше объема второго бассейна.

5. В треугольной пирамиде $SABC$ суммы трех плоских углов при каждой вершине A и B равны 180° и $SC=AB$. Внутри пирамиды взята некоторая точка D, сумма расстояний от которой до трех боковых граней SAB, SAC и SBC равна 7 *см*. Найти расстояние от центра описанного шара до грани SAB, если объемы пирамид $SABC$ и $DABC$ относятся как 8 : 1.

Разбор варианта 1

Задача 1. Данное уравнение равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} \sin(1-x) = \cos x, \\ \cos x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Решим уравнение. Запишем его в следующей форме:

$$\sin(1-x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Тогда возможны два варианта:

1) $1 - x = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi m.$

В этом случае, очевидно, решений нет;

2) $$1-x=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2\pi m,$$

$$2x=1-\frac{\pi}{2}-2\pi m$$

или

$$x=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}-2\pi m.$$

Поскольку $0\leqslant x\leqslant 2\pi$, то в последней формуле параметр m может принимать только два значения $m=-1$ и $m=-2$. Им соответствуют значения x, равные $3\pi/4+1/2$ и $7\pi/4+1/2$. Теперь осталось проверить, выполняется ли условие $\cos x\geqslant 0$, гарантирующее, что найденные значения x удовлетворяют области допустимых значений. Имеем

а) $$\frac{\pi}{2}<\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2}<\pi,\ \cos\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)<0;$$

б) $$\frac{3\pi}{2}<\frac{7\pi}{4}+\frac{1}{2}<2\pi,\ \cos\left(\frac{7\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)>0.$$

Таким образом, исходное уравнение имеет только одно решение: $x=7\pi/4+1/2$.

Ответ: $x=7\pi/4+1/2$.

Задача 2. Найдем решения первого неравенства. Учитывая, что основание обоих логарифмов меньше единицы и, кроме того, $x\neq 0$, имеем

$$x^2\leqslant x+2$$

или

$$-1\leqslant x\leqslant 2,\ x\neq 0.$$

Решения второго неравенства имеют вид

$$|x|\leqslant\frac{2a^2}{7}$$

или

$$-\frac{2a^2}{7}\leqslant x\leqslant\frac{2a^2}{7}. \qquad (1)$$

Легко понять, что все значения x, составляющие решения первого неравенства, удовлетворяют неравенству (1) только в том случае, если выполняется условие

$$2\leqslant\frac{2a^2}{7}.$$

Последнее имеет место, если $a\leqslant-\sqrt{7}$ и $a\geqslant\sqrt{7}$.

Ответ: $a\leqslant-\sqrt{7}$, $a\geqslant\sqrt{7}$.

Задача 3. Решения первого уравнения легко найти, если вспомнить, что модуль разности двух чисел есть расстояние между точками числовой прямой, координатами которых служат эти числа. Тогда решением уравнения будет любое число x, изображение которого на числовой прямой удалено от точек 2 и 3 на расстояния, сумма которых равна 1. Очевидно, что таких чисел существует бесконечно много, а именно, это будет любое число, удовлетворяющее неравенству $2 \leqslant x \leqslant 3$.

Квадратное неравенство

$$163x^2 - 813x + 974 \geqslant 0$$

имеет следующие решения:

$$x \leqslant 2 \text{ и } x \geqslant \frac{487}{163}.$$

Таким образом, условиям задачи удовлетворяют $x = 2$ и $^{487}/_{163} \leqslant x \leqslant 3$.

Ответ: $x = 2$; $^{487}/_{163} \leqslant x \leqslant 3$.

Задача 4. Обозначим объем второго резервуара буквой x, а третьего — y ($y \geqslant x$). Пропускная способность первого шланга равна $V/3$, второго — $V/4$, третьего — $V/5$. Тогда последнее условие задачи позволяет составить следующее уравнение:

$$\frac{V + x + y}{V/3 + V/4 + V/5} = 4$$

или

$$x + y = \frac{32}{15} V.$$

Второе уравнение задачи заключено в условии, что время самого быстрого наполнения системы резервуаров равно 6 *ч*. При этом, однако, неизвестно, к каким резервуарам был подсоединен тот или иной шланг. Для того чтобы сократить число случаев подлежащих рассмотрению, заметим, что время наполнения системы резервуаров определяется временем наполнения самого последнего резервуара.

Поскольку при самом быстром способе наполнения резервуаров первый резервуар будет наполнен за 3, 4 или 5 *ч*, то ясно, что время 6 *ч* относится не к этому, а ко второму или третьему резервуару. Легко понять, что при таком способе к первому резервуару следует подключить шланг с самой маленькой пропускной способностью, оставив два шланга с большей производительностью для второго и третьего резервуаров.

Поскольку объем второго резервуара не превосходит объема третьего резервуара, то ко второму резервуару следует подключить 2-й шланг, а к третьему резервуару — 1-й шланг.

Возможны два случая:

$$1.\ \begin{cases} \frac{x}{V/4}=6, \\ \frac{y}{V/3}\leqslant 6, \\ x+y=\frac{32}{15}V, \\ y\geqslant x. \end{cases} \qquad 2.\ \begin{cases} \frac{x}{V/4}\leqslant 6, \\ \frac{y}{V/3}=6, \\ x+y=\frac{32}{15}V, \\ y\geqslant x. \end{cases}$$

Первая система противоречива. Из второй системы находим: $x=2V/15$, $y=2V$.

Ответ: $x=2V/15$, $y=2V$.

Задача 5. Пусть фигура $S_1CS_3BS_2A$ представляет собой развертку боковой поверхности пирамиды $SABC$ на плоскость основания ABC (рис. 68). Из условия задачи о том, что суммы всех плоских углов пирамиды при вершинах B и C равны 180°, следует, что точки S_1, C и S_3 лежат на одной прямой. То же самое можно сказать и о точках S_3, B и S_2. Так как $S_1C=CS_3$ и $S_2B=BS_3$, то BC — средняя линия треугольника $S_1S_2S_3$. Значит, $S_1S_2=2\cdot BC$. С другой стороны, ломаная S_1AS_2 также равна $2\cdot BC$. Следовательно, точки S_1, A и S_2 лежат на одной прямой и фигура $S_1S_2S_3$ — треугольник.

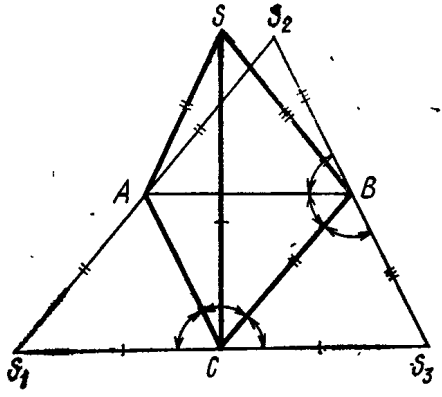


Рис. 68.

Площадь треугольника BCS_3 равна 100 *см*², а следовательно, площадь всего треугольника $S_1S_2S_3$ равна 400 *см*², а поскольку AB и AC — средние линии треугольника $S_1S_2S_3$, то площади всех граней пирамиды $SABC$ равны между собой и равны по 100 *см*² каждая. Больше того, треугольники S_1AC, S_2AB, S_3BC и ABC равны между собой. Следовательно, равны и площади кругов, описанных вокруг каждого из них. Значит, каждая из граней пирамиды $SABC$ находится на одном и том же расстоянии от центра описанного вокруг пирамиды шара, т. е. на расстоянии 3 *см*.

Соединив центр описанного вокруг пирамиды шара с каждой вершиной пирамиды $SABC$, получим, что объем всей пирамиды составлен из объемов четырех пирамид, у каждой из которых одна и та же высота, равная 3 *см*, и одна и та же площадь основания, равная 100 *см*². Объем каждой из таких пирамид равен

$$\frac{1}{3}\cdot 3\cdot 100=100,$$

а объем всей пирамиды $SABC$ равен 400 *см*³.

Ответ: 400 *см*³.

§ 31. ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ, 1975 г.

Вариант 1

1. Решить неравенство

$$\sqrt{-x^2-4x}+x+1>0.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\operatorname{ctg}(2y-\cos^2 x)=1,\\ 6y-15\cos^2 x=\frac{3\pi}{4}-1.\end{cases}$$

3. На боковых сторонах KL и MN равнобочной трапеции $KLMN$ выбраны соответственно точки P и Q так, что отрезок PQ параллелен основаниям трапеции. Известно, что в каждую из трапеций $KPQN$ и $PLMQ$ можно вписать окружность, и радиусы этих окружностей равны R и r соответственно. Определить основания LM и KN.

4. На дороге, ведущей из пункта A в пункт B, находится пункт C. Из пункта A в пункт B по этой дороге с постоянными скоростями вышли два пешехода. Второй пешеход вышел из пункта A на 12 *мин* позже первого, но прибыл в пункт B на 18 *мин* раньше него. При этом через пункт C пешеходы прошли с интервалом не более 6 *мин*. Если бы второй пешеход вышел из пункта A через 15 *мин* позже первого, увеличив свою скорость на 20%, а скорость первого пешехода не изменилась, то второй пешеход прибыл бы в пункт B на 35 *мин* раньше первого, а через пункт C пешеходы прошли с интервалом не менее 5 *мин*. Если бы первый пешеход уменьшил свою скорость на 1 *км/ч*, а скорость второго пешехода осталась первоначальной, то первый пешеход потратил бы на путь от A до C в 3 раза меньше времени, чем второй пешеход на весь путь от A до B. Найти длину пути от A до C.

5. Все ребра треугольной пирамиды $ABCD$ касаются некоторого шара. Три отрезка, соединяющие середины скрещивающихся ребер AB и CD, AC и BD, AD и BC, равны. Угол ABC равен 100°. Найти отношение высот пирамиды, опущенных из вершин A и B.

Вариант 2

1. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2+x}-2x+1>0.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\cos(2x+6\sin^2 y)=1,\\ 3x-3\sin^2 y=-10.\end{cases}$$

3. Дана прямоугольная трапеция, основания которой равны a и b $(a<b)$. Известно, что некоторая прямая, параллельная основаниям, рассекает ее на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность. Определить радиусы этих окружностей.

4. В обувном цехе работают две бригады. Каждая из них получила заказ на пошив одного и того же количества женской и одного и того же количества мужской обуви, причем сначала требовалось изготовить женскую обувь. На пошив одной пары обуви (как мужской, так и женской) бригада затрачивает одно и то же количество времени. Первая бригада начала работать над заказом на 7 дней раньше, а закончила выполнение всего заказа на 11 дней позже второй. При этом интервал времени между окончанием пошива бригадами женской обуви был не более 5 дней. Если бы первая бригада начала работу над заказом на 8 дней раньше второй, увеличив свою производительность на 5%, а производительность второй бригады не изменилась, то весь заказ первая бригада выполняла бы на 7 дней позже второй, а интервал времени между окончаниями пошива бригадами женской обуви был бы не менее двух дней.

Если бы производительность второй бригады увеличилась на 20 пар обуви в день, а производительность первой бригады оставалась бы первоначальной, то вторая бригада потратила бы на пошив женской обуви в 2,4 раза меньше времени, чем первая бригада на выполнение всего заказа. Определить число пар женской обуви в заказе.

5. Дана треугольная пирамида $ABCD$. Скрещивающиеся ребра AB и CD этой пирамиды перпендикулярны, а скрещивающиеся ребра AC и BD перпендикулярны и равны между собой. Все ребра этой пирамиды касаются некоторого шара. Найти его радиус, если длина ребра BC равна a.

Вариант 3

1. Решить неравенство

$$\sqrt{-x^2+x+2}+2x-1>0.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(3y-5\cos^2 x)=1, \\ 3y-10\cos^2 x=\frac{\pi}{4}-1. \end{cases}$$

3. На боковых сторонах PQ и ST равнобочной трапеции $PQST$ выбраны соответственно точки M и N так, что отрезок MN параллелен основаниям трапеции. Известно, что в каждую из трапеций $PMNT$ и $MQSN$ можно вписать окружность. Найти основания трапеции $PQST$, если сторона PQ равна c, а отрезок MN равен l $(c>2l)$.

4. Два самолета, следующие с постоянными скоростями из города A в город C, пролетают над некоторым пунктом B. Известно, что второй самолет вылетел из города A на 14 *мин* позже первого, а в город C прилетел на 16 *мин* раньше него. При этом над пунктом B самолеты пролетели с интервалом не более 4 *мин*.

Если бы второй самолет вылетел из города A через 10 *мин* после вылета первого, уменьшив свою скорость на 10%, а скорость первого самолета не изменилась, то над пунктом B самолеты пролетели бы с интервалом не менее 2 *мин*, а в город C второй самолет прилетел бы на 10 *мин* раньше первого. Если бы скорость второго самолета увеличилась на 40 *км/ч*, а скорость первого самолета не изменилась, то второй самолет потратил бы на путь от A до B в $^7/_3$ раза меньше времени, чем первый самолет на весь путь от A до C. Определить скорость первого самолета.

5. Все ребра треугольной пирамиды $ABCD$ касаются некоторого шара. Три отрезка, соединяющие середины скрещивающихся ребер AB и CD, AC и BD, AD и BC, равны. Угол DBC равен 50°, а угол BCD больше угла BDC. Найти отношение площадей граней ABD и ABC.

Вариант 4

1. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2+4x-5}-2x+3>0.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sin(2x+\sin^2 y)=0,\\ x-3\sin^2 y=-2.\end{cases}$$

3. Дана прямоугольная трапеция. Известно, что некоторая прямая, параллельная основаниям трапеции, рассекает ее на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность. Определить основания исходной трапеции, если ее боковые стороны равны c и d $(c>d)$.

4. Два грузовика доставили со склада на стройку одно и то же количество кирпича и одно и то же количество цемента, причем каждый из них доставлял сначала кирпич, а потом цемент, перевозя за каждую поездку груз одного и того же веса. Первый грузовик начал работу на 40 *мин* раньше, а закончил на 40 *мин* позже второго. При этом интервал времени между окончаниями доставки кирпича грузовиками был не более 20 *мин*.

Если бы первый грузовик начал работу на 1 *ч* 5 *мин* раньше второго, уменьшив свою производительность на 10%, а производительность второго грузовика не изменилась, то второй грузовик закончил бы работу на 55 *мин* раньше первого, а интервал вре-

мени между окончаниями доставки кирпича грузовиками был бы не менее 25 *мин*. Если бы производительность первого грузовика уменьшилась на 2 *т* в час, а производительность второго грузовика не изменилась, то первый грузовик затратил бы на выполнение всей работы в два раза больше времени, чем второй грузовик на доставку кирпича. Сколько всего цемента было доставлено на стройку?

5. Дана треугольная пирамида *ABCD*. Скрещивающиеся ребра *AC* и *BD* этой пирамиды перпендикулярны. Так же перпендикулярны скрещивающиеся ребра *AD* и *BC*. Ребра *AB* и *CD* равны. Все ребра этой пирамиды касаются шара радиуса *r*. Найти площадь грани *ABC*.

Разбор варианта 1

Задача 1. Допустимыми являются те значения x, для которых

$$-x^2-4x\geqslant 0,$$
$$x(x+4)\leqslant 0,$$
$$-4\leqslant x\leqslant 0.$$

Исходное неравенство можно записать следующим образом:

$$\sqrt{-x^2-4x}>-x-1.$$

Необходимо различать два случая

1. $-x-1\geqslant 0$, т. е. $x\leqslant -1$, а с учетом указанных выше ограничений:

$$-4\leqslant x\leqslant -1.$$

В этом случае обе части неравенства неотрицательны и, после возвышения их в квадрат, получится неравенство, равносильное исходному. Таким образом, имеем

$$\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant -1,\\ -x^2-4x>(-x-1)^2\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant -1,\\ 2x^2+6x+1<0.\end{cases}$$

Отсюда находим:

$$\frac{-3-\sqrt{7}}{2}<x\leqslant -1.$$

2. $-x-1<0$, т. е. $x>-1$, и далее: $-1<x\leqslant 0$. Очевидно, что все рассматриваемые x удовлетворяют исходному неравенству, поскольку при этих x его левая часть неотрицательна, а правая — меньше нуля.

Объединяя множества значений x из обоих случаев, находим все решения неравенства.

Ответ:

$$\frac{-3-\sqrt{7}}{2} < x \leqslant 0.$$

Задача 2. Из данной системы уравнений следует, что

$$\begin{cases} 6y - 15\cos^2 x = \frac{3\pi}{4} - 1, \\ 2y - \cos^2 x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots . \end{cases}$$

Отсюда нетрудно найти y и $\cos^2 x$.

$$\begin{cases} y = \frac{\pi}{8} + \frac{15k\pi + 1}{24}, \\ \cos^2 x = \frac{3k\pi + 1}{12}. \end{cases}$$

Поскольку $0 \leqslant \cos^2 x \leqslant 1$, то целочисленный параметр k может принимать только два значения: $k_1 = 0$ и $k_2 = 1$.

В первом случае ($k = 0$) имеем

$$\begin{cases} y = \frac{3\pi + 1}{24}, \\ \cos^2 x = \frac{1}{12}. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$\begin{cases} x = \pm \arccos \sqrt{\frac{1}{12}} + m\pi, \\ y = \frac{3\pi + 1}{24}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots . \end{cases}$$

Во втором случае ($k = 1$) имеем

$$\begin{cases} y = \frac{18\pi + 1}{24}, \\ \cos^2 x = \frac{3\pi + 1}{12} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x = \pm \arccos \sqrt{\frac{3\pi + 1}{12}} + m\pi, \\ y = \frac{18\pi + 1}{24}. \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = \pm \arccos \sqrt{\frac{1}{12}} + m\pi; \\ y = \frac{3\pi + 1}{24}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \pm \arccos \sqrt{\frac{3\pi + 1}{12}} + m\pi; \\ y = \frac{18\pi + 1}{24}, \end{cases}$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Задача 3. Чертеж к этой задаче представлен на рис. 69. Достроим равнобочную трапецию $KLMN$ до равнобедренного треугольника KSN и опустим из центров данных окружностей O_1 и O_2 перпендикулярны в точки их касания со стороной KL. Проведем $O_1C \parallel KL$, угол O_1O_2C назовем α.

Тогда из треугольника O_1O_2C, в котором

$$O_1O_2 = r + R; \; O_2C = R - r,$$

находим косинус угла α:

$$\cos\alpha = \frac{R - r}{R + r}.$$

Очевидно, что центры рассматриваемых окружностей O_1 и O_2 лежат на высоте равнобедренного треугольника KSN. Поэтому отрезок SD равен

$$SD = \frac{r}{\cos\alpha} - r = \frac{2r^2}{R - r}.$$

Из прямоугольного треугольника LSD легко определяется LD и затем все основание LM трапеции:

$$LD = SD \operatorname{ctg}\alpha = \frac{r^2}{\sqrt{Rr}},$$

$$LM = 2 \cdot LD = \frac{2r^2}{\sqrt{Rr}}.$$

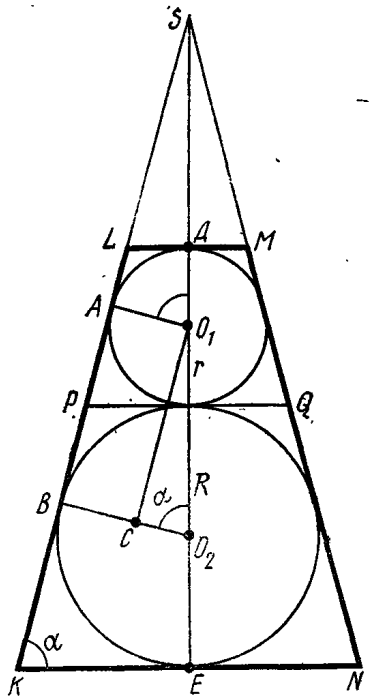


Рис. 69.

Аналогичным образом находится основание KN трапеции. В треугольнике KSE катет SE равен

$$\frac{r}{\cos\alpha} + r + 2R.$$

Поэтому

$$KN = 2 \cdot KE = 2 \cdot SE \cdot \operatorname{ctg}\alpha,$$

$$KN = 2\operatorname{ctg}\alpha\left(\frac{r}{\cos\alpha} + r + 2R\right), \qquad KN = \frac{2R^2}{\sqrt{Rr}}.$$

Ответ: $2r^2/\sqrt{Rr}$ и $2R^2/\sqrt{Rr}$.

Задача 4. Обозначим скорости пешеходов через v_1 и v_2 соответственно, расстояние $AC=x$, расстояние $CB=y$. Схема составления уравнений понятна из следующей таблицы:

Условие задачи	Уравнение или неравенство
1	2
второй пешеход вышел из пункта A на 1/5 *ч* позже и пришел в пункт B на 3/10 *ч* раньше, чем первый пешеход;	$\frac{x+y}{v_1}=\frac{x+y}{v_2}+\frac{1}{5}+\frac{3}{10}$, (1)
при этом интервал времени между прохождением пешеходами пункта C не превосходит 1/10 *ч*;	$\left\|\frac{x}{v_1}-\left(\frac{x}{v_2}+\frac{1}{5}\right)\right\|\leqslant\frac{1}{10}$, (2)
если второй пешеход увеличит свою скорость на 20% $\left(\text{т. е. } v'_2=\frac{6}{5}v_2\right)$, то, выйдя из A на 1/4 *ч* позже, он придет на 7/12 *ч* раньше, чем первый пешеход;	$\frac{x+y}{v_1}=\frac{x+y}{\frac{6}{5}v_2}+\frac{1}{4}+\frac{7}{12}$, (3)
если первый пешеход уменьшит свою скорость на 1 *км/ч*, то время, за которое он пройдет AC, в 3 раза меньше времени, за которое второй пешеход пройдет AB;	$\frac{x}{v_1-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{x+y}{v_2}$, (4)
при этом интервал времени между прохождением пешеходами пункта C не менее 1/12 *ч*.	$\left\|\frac{x}{v_1}-\left(\frac{x}{\frac{5}{6}v_2}+\frac{1}{4}\right)\right\|\geqslant\frac{1}{12}$. (5)

Поясним неравенства, в которые входит абсолютная величина. Дело в том, что заранее не ясно, кто из пешеходов проходит пункт C первым. Поэтому интервал времени между моментами, в которые они проходят этот пункт, записывается с помощью абсолютной величины разности соответствующих времен.

Таким образом, имеется система трех уравнений, содержащая четыре неизвестные величины, и два неравенства. Особенность этой задачи состоит в том, что именно эти неравенства в совокупности с уравнениями задачи позволяют получить еще одно недостающее для решения уравнение. Покажем, как это делается. Из уравнений (1) и (3) легко определяются величины $(x+y)/v_2$ и $(x+y)/v_1$:

$$\frac{x+y}{v_2}=2;\quad \frac{x+y}{v_1}=2{,}5$$

и далее их отношение:

$$\frac{x+y}{v_2}:\frac{x+y}{v_1}=\frac{v_1}{v_2}=\frac{4}{5}.$$

Благодаря тому что отношение скоростей пешеходов найдено, можно упростить неравенства задачи. Имеем

$$\left|\frac{x}{v_1}\left(1-\frac{v_1}{v_2}\right)-\frac{1}{5}\right|\leqslant\frac{1}{10},$$

$$\left|\frac{x}{v_1}\left(1-\frac{4}{5}\right)-\frac{1}{5}\right|\leqslant\frac{1}{10}$$

и далее

$$\left|\frac{1}{5}\frac{x}{v_1}-\frac{1}{5}\right|\leqslant\frac{1}{10}$$

и, наконец

$$\left|\frac{x}{v_1}-1\right|\leqslant\frac{1}{2}.$$

Аналогично второе неравенство преобразуется к виду

$$\left|\frac{x}{v_1}-\frac{3}{4}\right|\geqslant\frac{1}{4}.$$

На рис. 70 изображена картина совмещения решений этих двух неравенств относительно величин x/v_1. Имеются следующие решения

$$\frac{x}{v_1}=\frac{1}{2}\quad\text{и}\quad 1\leqslant\frac{x}{v_1}\leqslant\frac{3}{2}.$$

Покажем, что второе множество решений не соответствует условию задачи. Для этого обратимся к уравнению (4). Учитывая, что $(x+y)/v_2=2$, получаем:

$$\frac{x}{v_1-1}=\frac{2}{3},\quad x=\frac{2}{3}v_1-\frac{2}{3}$$

или

$$\frac{x}{v_1}=\frac{2}{3}-\frac{2}{3v_1}.$$

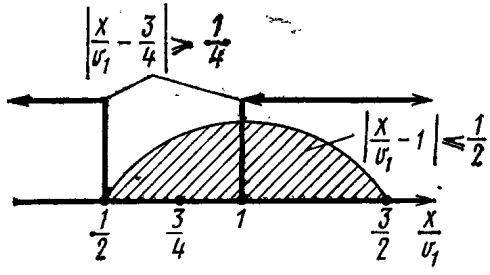


Рис. 70.

Поскольку $v_1>0$, отношение $2/(3v_1)$ представляет собой положительную величину, то отсюда следует, что $x/v_1<1$. Таким образом, второе множество значений отношения x/v_1 не является решением задачи. Получив еще одно дополнительное уравнение, связывающее x и v_1 (в чем и заключалось центральное место решения), имеем систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{x}{v_1-1}=\dfrac{2}{3},\\[2ex] \dfrac{x}{v_1}=\dfrac{1}{2},\end{cases}$$

откуда легко определяются x и v_1:

$$x=2;\ v_1=4.$$

Поскольку в условии задачи не требуется определять остальные неизвестные, то решение задачи закончено.

Ответ: 2 *км*.

Задача 5. Покажем, что из условия о равенстве отрезков, соединяющих середины скрещивающихся ребер пирамиды $ABCD$, рис. 71, следует, что эти ребра попарно перпендикулярны друг другу. Возьмем, например, отрезки M_1N_1 и M_2N_2, соединяющие середины пар ребер AD, BC и AB, CD соответственно. Соединим точки M_1, M_2, N_1, N_2 отрезками прямых. Очевидно, что $M_1M_2 \| BD \| N_1N_2$ и $M_2N_1 \| AC \| M_1N_2$, как средние линии соответствующих треугольников. Поэтому фигура $M_1M_2N_1N_2$ — параллелограмм. Поскольку $M_1N_1 = M_2N_2$, то диагонали этого параллелограмма равны между собой и, следовательно, этот параллелограмм — прямоугольник. Значит $BD \perp AC$. Действительно, $M_1M_2 \| BD$; $M_2N_1 \| AC$ и $M_1M_2 \perp M_2N_1$. Аналогично доказывается, что $AB \perp CD$ и $AD \perp BC$.

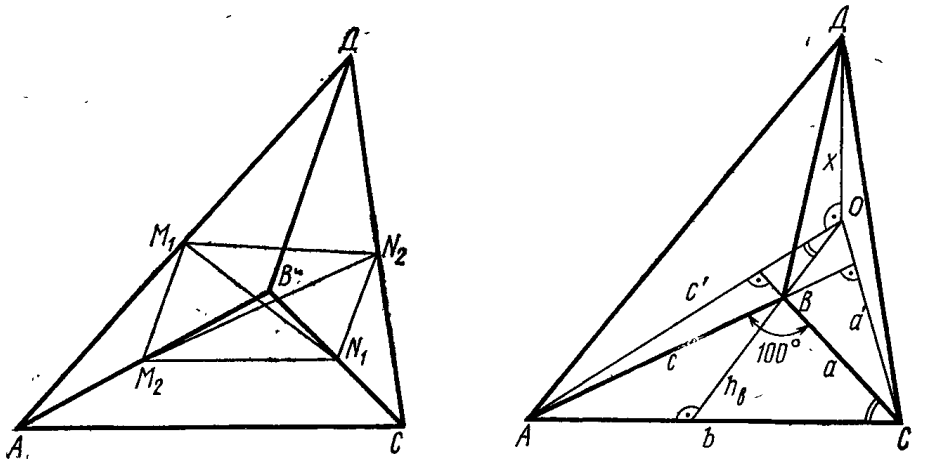


Рис. 71.

Таким образом, в условии задачи речь идет о пирамиде, у которой скрещивающиеся ребра взаимно перпендикулярны и, кроме того, касаются некоторого шара. Покажем, что такая пирамида будет обязательно п р а в и л ь н о й.

Для доказательства этого утверждения отметим два следующих факта:

в пирамиде с попарно перпендикулярными скрещивающимися ребрами каждая вершина проектируется в точку пересечения высот противоположной ей грани;

в треугольной пирамиде, все ребра которой касаются некоторого шара, суммы противоположных скрещивающихся ребер равны друг другу.

Действительно, поскольку каждое ребро основания перпендикулярно скрещивающемуся с ним боковому ребру пирамиды, являющемуся наклонной плоскостью к плоскости основания, то по теореме о трех перпендикулярах оно перпендикулярно и его проекции на эту плоскость. Поэтому каждая из проекций бокового ребра на плоскость основания будет высотой треугольника, лежащего

в основании, и, следовательно, вершина пирамиды проектируется в точку пересечения высот основания (точка O на рис. 71 справа; треугольник ABC по условию — тупоугольный. Поэтому точка O лежит вне треугольника).

Второе утверждение о равенстве сумм скрещивающихся ребер

$$AD+BC=CD+AB=AC+BD$$

доказывается точно таким же образом, как и для плоского четырехугольника, описанного около окружности. Нужно только использовать теорему о равенстве касательных, проведенных к шару из одной точки вне этого шара.

Перейдем к доказательству основного утверждения. Обозначим $AB=c$, $AO=c'$, $BC=a$, $OC=a'$, $OD=x$ и $AC=b$. Высоту BE основания ABC обозначим h_b. Имеем следующее равенство:

$$AD+a=CD+c$$

или

$$\sqrt{x^2+c'^2}+a=\sqrt{x^2+a'^2}+c. \qquad (1)$$

Найдем связь между отрезками a, a', c и c'. Из прямоугольных треугольников AOE и BCE, в которых углы AOE и BCE равны как углы с одинаково направленными и перпендикулярными сторонами, находим

$$\frac{h_b}{a}=\frac{AE}{c'}, \text{ т. е. } \frac{h_b}{a}=\frac{\sqrt{c^2-h_b^2}}{c'}$$

или

$$c'^2=\frac{a^2c^2}{h_b^2}-a^2. \qquad (2)$$

Аналогично этому из треугольников BAE и EOC с равными углами BAE и EOC находим

$$\frac{h_b}{c}=\frac{EC}{a'}, \text{ т. е. } \frac{h_b}{c}=\frac{\sqrt{a^2-h_b^2}}{a'},$$

или

$$a'^2=\frac{a^2c^2}{h_b^2}-c^2. \qquad (3)$$

Сравнивая между собой равенства (2) и (3), получаем

$$a^2+c'^2=c^2+a'^2. \qquad (4)$$

Объединяя (1) и (4), получим систему равенств

$$\begin{cases} a+\sqrt{x^2+c'^2}=c+\sqrt{x^2+a'^2}, \\ a^2+c'^2=c^2+a'^2. \end{cases}$$

Возводя в квадрат обе части первого уравнения и учитывая второе уравнение системы, получим

$$a\sqrt{x^2+c'^2}=c\sqrt{x^2+a'^2},$$

после чего имеем

$$\begin{cases} a+\sqrt{x^2+c'^2}=c+\sqrt{x^2+a'^2}, \\ a\sqrt{x^2+c'^2}=c\sqrt{x^2+a'^2}. \end{cases}$$

Рассматривая эти равенства как систему уравнений относительно выражений a и $\sqrt{x^2+c'^2}$, приходим к заключению, что возможны два случая:

1) $a=c$; $\sqrt{x^2+c'^2}=\sqrt{x^2+a'^2}$ или

$$AD=CD,\ AB=BC.$$

2) $a=\sqrt{x^2+a'^2}$; $c=\sqrt{x^2+c'^2}$ или

$$AD=AB,\ CD=CB.$$

I. *Первый случай*: $AD=CD$; $AB=BC$.

Если все вышеприведенные рассуждения и вычисления проделать для той же пирамиды $ABCD$, приняв A за вершину, а треугольник BDC — за основание, то получим две возможности: либо $AD=AC$, $BD=BC$ и тогда пирамида $ABCD$ — правильная ($\triangle ADC$ — равносторонний, $BA=BC=BD$); либо $AD=BD$ и $AC=BC$ и опять-таки пирамида $ABCD$ — правильная ($\triangle ABC$ — равносторонний, $DA=DB=DC$). Однако этот случай невозможен, поскольку угол ABC равен 100°, а не 60°.

II. *Второй случай*: $AD=AB$, $CD=CB$.

Применяя предыдущие рассуждения к пирамиде $ABCD$, считая ее вершиной точку A и основанием — треугольник BDC, приходим к двум вариантам: либо $AD=AC$, $BD=BC$ и тогда пирамида $ABCD$ — правильная ($\triangle BDC$ — равносторонний, $AD=AB=AC$), что невозможно, так как боковая грань ABC такой пирамиды должна быть остроугольным, а не тупоугольным треугольником; либо $AD=BD$ и $AC=BC$ и опять-таки пирамида $ABCD$ — правильная ($\triangle ABD$ — равносторонний, $AC=BC=DC$), что невозможно, поскольку боковая грань ABC не является остроугольным треугольником.

Итак, остается единственно возможный случай: пирамида $ABCD$ — правильная и в ней $\triangle ACD$ — равносторонний, а точка B — вершина ($BA=BC=BD$).

После этого легко вычислить отношение высот пирамиды, опущенных из вершин A и B. Имеем:

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}\cdot H_A\cdot S_{\triangle BCD}=\frac{1}{3}\cdot H_B\cdot S_{\triangle ADC}.$$

Отсюда находим

$$\frac{H_A}{H_B}=\frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle BCD}}.$$

Но отношение площадей треугольников ACD и BCD, имеющих общую сторону CD, равно отношению высот этих треугольников, опущенных из вершин A и B на сторону CD. Первая из них равна $b\sqrt{3}/2$, вторая — $b \cdot \operatorname{ctg} 50°/2$. Таким образом,

$$\frac{H_A}{H_B} = \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} 50°.$$

Ответ: $\sqrt{3} \operatorname{tg} 50°$.

§ 32. МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, 1972 г.

Вариант 1

1. Найти все значения x, при которых справедливо неравенство

$$\frac{\log_8 x}{\log_2 (1+2x)} \leqslant \frac{\log_2 \sqrt[9]{1+2x}}{\log_2 x}.$$

2. Пункты А и В соединены двумя дорогами, одна из которых на 3 *км* короче другой. Из В и А по более короткой дороге вышел пешеход; и одновременно из А по той же дороге выехал велосипедист. Пешеход и велосипедист одновременно прибыли в А через два часа после начала движения. За это время пешеход прошел один раз путь от В до А, а велосипедист проехал два раза в одном направлении по кольцевому маршруту, образованному двумя названными дорогами.

Найти скорость пешехода и велосипедиста, если известно, что их вторая встреча произошла на расстоянии 3,5 *км* от пункта В.

3. В треугольнике ABC $AB=20$ *м*, $AC=24$ *м*. Известно, что вершина C, центр вписанного в треугольник ABC круга и точка пересечения биссектрисы угла A со стороной BC лежат на окружности, центр которой лежит на стороне АС.

Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

4. В треугольной пирамида $SABC$ боковое ребро SC равно ребру AB и наклонено к плоскости основания ABC под углом 60°. Известно, что вершины A, B, C и середины боковых ребер пирамиды расположены на сфере радиуса 1 *м*.

Доказать, что центр указанной сферы лежит на ребре AB и найти высоту пирамиды.

5. Даны три уравнения с действительными коэффициентами:

1) $x^2-(a+b)x+8=0$,

2) $x^2-b(b+1)x+c=0$,

3) $x^4-b(b+1)x^2+c=0$.

Каждое из них имеет по крайней мере один действительный корень. Известно, что корни первого уравнения больше единицы. Известно также, что все корни первого уравнения являются корнями третьего уравнения и хотя бы один корень первого уравнения удовлетворяет второму уравнению.

Найти числа a, b, c, если $b>3$.

Вариант 2

1. Найти все значения x, при которых справедливо неравенство

$$(\log_x 4)\log_2 \frac{5-12x}{12x-8} \geqslant 2.$$

2. От пристани А вниз по течению реки одновременно отошли плот и катер. Катер доплыл до пристани В, вернулся к пристани А и снова от А поплыл до пристани В (без остановок). К пристани В плот и катер причалили одновременно, а встретились они на расстоянии 3 *км* от пристани А.

Определить скорость течения реки, если известно, что на путь от А до В катер тратил на полчаса меньше времени, чем на путь от В до А.

3. В треугольнике KLM угол L — тупой, а длина стороны KM равна 6 *м*. Найти радиус описанной около треугольника KLM окружности, если известно, что на этой окружности лежит центр окружности, проходящей через вершины K, M и точку пересечения высот треугольника KLM.

4. В треугольной пирамиде $SABC$ $AC=AB$, а ребро SA наклонено к плоскостям граней ABC и SBC под углом 45°. Известно, что вершина A и середины всех ребер пирамиды, кроме SA, лежат на сфере радиуса 1 *м*.

Доказать, что центр указанной сферы расположен на ребре SA и найти площадь грани ASC.

5. Даны три уравнения с действительными коэффициентами:

1) $ax^2+bx+c=0$,

2) $cx^2+bx+a=0$,

3) $x^2+a^2x+c^2=0$.

Каждое из них имеет по крайней мере один действительный корень. Известно, что любой корень третьего уравнения удовлетворяет первому уравнению и хотя бы один корень второго уравнения является корнем третьего уравнения.

Найти числа a, b, c, если $a>2|c|$.

Вариант 3

1. Найти все значения x, при которых справедливо неравенство

$$(\log_3 x)^2 \geqslant \left(\log_3 \sqrt{1-\frac{x}{4}}\right)^2.$$

2. Из пункта А кольцевого шоссе одновременно в одном направлении выехали автомобиль и мотоцикл, каждый с постоянной скоростью. Автомобиль без остановок дважды проехал по всему шоссе в одном направлении. В момент, когда автомобиль догнал мотоциклиста, мотоциклист повернул обратно, увеличил скорость на 16 *км/ч* и через 22,5 *мин* после разворота одновременно с автомобилем прибыл в пункт А.

Найти длину всего пути мотоцикла, если этот путь на 5,25 *км* короче длины всего шоссе.

3. В треугольнике ABC угол C — тупой; биссектриса BE угла B делит сторону AC на отрезки $AE=3$ *м* и $EC=2$ *м*. Известно, что точка K, лежащая на продолжении стороны BC за вершину C, является центром окружности, проходящей через точки C, E и точку пересечения биссектрисы угла B с биссектрисой угла ACK.

Определить расстояние от точки E до стороны AB.

4. В треугольной пирамиде $SABC$ известны плоские углы при вершине S: $\angle BSC=90^\circ$, $\angle ASC=\angle ASB=60^\circ$. Вершины A, S и середины ребер SB, SC, AB, AC лежат на поверхности шара радиуса 3 *м*.

Доказать, что ребро SA является диаметром этого шара и найти объем пирамиды.

5. Даны три уравнения с действительными коэффициентами:

1) $x^2+ax+ac=0$,

2) $x^2-bx+c^3=0$,

3) $x^4-bx^2+c^3=0$.

Каждое из них имеет по крайней мере один действительный корень. Известно, что абсолютные величины корней первого уравнения больше единицы. Известно также, что каждый из корней первого уравнения является корнем третьего уравнения и по крайней мере один из корней первого уравнения удовлетворяет второму уравнению.

Найти числа a, b, c.

Вариант 4

1. Найти все значения x, при которых справедливо неравенство

$$(\log_{x^2} 3)\log_3 \sqrt[3]{\frac{1-5x}{6x-4}} < \frac{1}{6}.$$

2. От пристани А к пристани В против течения реки отошел катер, собственная скорость которого в стоячей воде в 7 раз больше скорости течения реки. Одновременно навстречу ему от пристани В, расстояние которой до А по реке равно 20 *км*, отошла лодка. На каком расстоянии от В произошла встреча катера с лодкой, если известно, что через полчаса после начала движения лодке оставалось проплыть 4 *км* до встречи и что катер затратил на путь до встречи с лодкой на 20 *мин* больше, чем на путь от места встречи до пункта В?

3. Радиус окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, равен 1 *м*. Известно, что на этой окружности лежит центр окружности, проходящей через вершины A, C и точку пересечения высот треугольника ABC.

Найти длину стороны AC.

4. В треугольной пирамиде $SABC$ середины всех ребер лежат на поверхности шара радиуса 2 *м*; $AB=3$ *м*, $AC=4$ *м*. Ребро SA перпендикулярно плоскости основания ABC.

Доказать, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер пирамиды, являются диаметрами указанного шара, и найти объем пирамиды.

5. Даны три уравнения с действительными коэффициентами:

1) $x^2+px+q=0$,

2) $qx^2+px+1=0$,

3) $x^2+rx+r(p-1)=0$.

Каждое из них имеет по крайней мере один действительный корень. Известно, что любой корень третьего уравнения удовлетворяет первому уравнению и хотя бы один корень второго уравнения является корнем третьего уравнения. Найти числа p, q, r, если $q\neq 1$, $0<r<2$.

Разбор варианта 1

Задача 1. В этой задаче нужно рассматривать только положительные значения x. Кроме того, $x\neq 1$. При этом очевидно, что величина $1+2x$ будет больше, чем единица. Поэтому

$$\log_2(1+2x)>0.$$

Рассмотрим два случая: $0<x<1$ и $x>1$. В первом случае имеем

$$\log_2 x<0,$$

$$\log_8(x)\log_2 x\geqslant(\log_2\sqrt[3]{1+2x})\log_2(1+2x).$$

После упрощений получается

$$\log_2^2 x\geqslant\log_2^2(1+2x)$$

или

$$|\log_2 x| \geqslant |\log_2 (1+2x)|,$$
$$-\log_2 x \geqslant \log_2 (1+2x),$$
$$\frac{1}{x} \geqslant 1+2x.$$

Поскольку $x>0$, имеем систему неравенств

$$\begin{cases} 2x^2+x-1 \leqslant 0 \\ 0<x<1, \end{cases}$$

решение которой записывается неравенствами

$$0<x\leqslant \frac{1}{2}.$$

Во втором случае $\log_2 x>0$, поэтому имеем

$$(\log_2 x)\cdot\log_2 x \leqslant (\log_2 \sqrt[3]{1+2x})\log_2 (1+2x)$$

и далее

$$\log_2^2 x \leqslant \log_2^2 (1+2x),$$
$$|\log_2 x| \leqslant |\log_2 (1+2x)|,$$
$$\log_2 x \leqslant \log_2 (1+2x),$$
$$x \leqslant 1+2x,$$
$$x \geqslant -1.$$

Учитывая, что $x>1$, получаем $x>1$.

Ответ: $0<x\leqslant\frac{1}{2}$, $x>1$.

Задача 2. Обозначим через S расстояние между пунктами A и B, равное длине короткой дороги. Тогда протяженность длинной дороги равна $S+3$.

Пусть $v_в$ и $v_п$ — скорости велосипедиста и пешехода соответственно. Тогда условия задачи приводят к системе трех уравнений:

$$\begin{cases} \frac{S}{v_п} = 2 = \frac{2(2S+3)}{v_в} \\ \frac{3,5}{v_п} = \frac{2S+3+S-3,5}{v_в} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} S = 2v_п \\ 2S+3 = v_в \\ \frac{7}{v_п} = \frac{6S-1}{v_в}. \end{cases}$$

Исключая неизвестные $v_п$ и $v_в$ получаем из последней системы уравнение для определения расстояния S:

$$\frac{2S+3}{S}=\frac{1}{2}\,\frac{6S-1}{7},$$

$$6S^2-29S-42=0.$$

Полученное квадратное уравнение имеет единственный положительный корень $S=6$. Затем находим скорости:

$$v_п=3,\quad v_в=15.$$

Ответ: 3 *км/ч*, 15 *км/ч*.

Задача 3. Пусть центр окружности, вписанной в треугольник ABC (рис. 72), представляется точкой O_1, центр окружности, проходящей через точки O_1, D и C, представляется точкой O_2. Тогда D—пересечение биссектрисы угла A со стороной BC, точка E — конец диаметра окружности O_2. Обозначим угол A буквой α, а угол C—буквой β. Ясно, что угол EDC — прямой, поскольку он опирается на диаметр окружности. Кроме того, понятно, что угол ADE равен углу O_1CE, поскольку они вписаны в одну окружность и опираются на одну и ту же дугу.

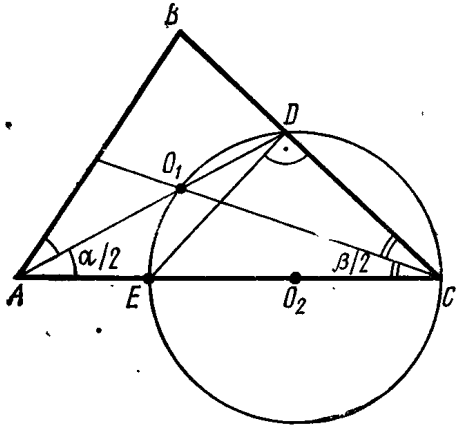


Рис. 72.

Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, определяется по теореме синусов и выражается формулой

$$R=\frac{BC}{2\sin\alpha}.$$

Так как в условии задачи даны стороны AB и AC, то сторона BC может быть найдена по теореме косинусов, если будет найден угол α. Таким образом, важно определить угол α.

Рассмотрим треугольник ADC. В нем угол ADE равен $\beta/2$, угол EDC — прямой. Поэтому

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{2}+\beta=\pi,$$

откуда

$$\beta=\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{3}.$$

Запишем теорему синусов для треугольника ABC:

$$\frac{AB}{\sin\beta}=\frac{AC}{\sin(\alpha+\beta)};\quad\frac{20}{\sin\beta}=\frac{24}{\sin(\alpha+\beta)}$$

или

$$\frac{5}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{3}\right)}=\frac{6}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\alpha}{3}\right)}.$$

Заметив, что

$$\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{3}=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{3}\right),$$

получаем уравнение

$$\frac{5}{\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{3}\right)}=\frac{6}{\sin 2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{3}\right)}.$$

Так как $\alpha<\pi$, то

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{3}\right)\neq 0.$$

Поэтому находим

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{3}\right)=\frac{3}{5}$$

и далее

$$\alpha=3\arcsin\frac{3}{5}-\frac{\pi}{2}.$$

Определим теперь по теореме косинусов сторону

$$BC^2=20^2+24^2-2\cdot 20\cdot 24\cos\alpha.$$

Так как

$$\cos\left(3\cdot\arcsin\frac{3}{5}-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(3\arcsin\frac{3}{5}\right),$$

и используя формулу синуса утроенного аргумента

$$\sin 3\varphi=3\sin\varphi-4\sin^3\varphi,$$

находим

$$\cos\alpha=\frac{117}{125}\text{ и }\sin\alpha=\frac{44}{125}.$$

Далее вычисляем сторону BC и радиус описанной окружности R:

$$BC=8{,}8;\ R=12{,}5.$$

Ответ: 12,5 *м*.

Задача 4. Пусть M_1, M_2 и M_3 — середины ребер SA, SB и SC соответственно, D — основание перпендикуляра, опущенного из вершины пирамиды на основание ABC (рис. 73). Справа на рисунке изображен треугольник SCD, являющийся элементом этой пирамиды.

Четырехугольники AM_1M_2B, BM_2M_3C и CM_3M_1A представляют собой трапеции, поскольку M_1M_2, M_2M_3 и M_3M_1 — средние линии соответствующих треугольников. Больше того, поскольку каждая

из этих трапеций вписана в окружность, возникающую при пересечении плоскостей боковых граней пирамиды с шаром, то все эти трапеции являются равнобочными (это легко показать отдельно). Отсюда следует равенство всех боковых ребер пирамиды друг другу. Действительно, каждая из точек M_1, M_2 и M_3 делит боковое ребро пополам, а эти половины равны между собой.

Из равенства боковых ребер пирамиды, представляющих собой наклонные к плоскости основания, следует равенство проекций

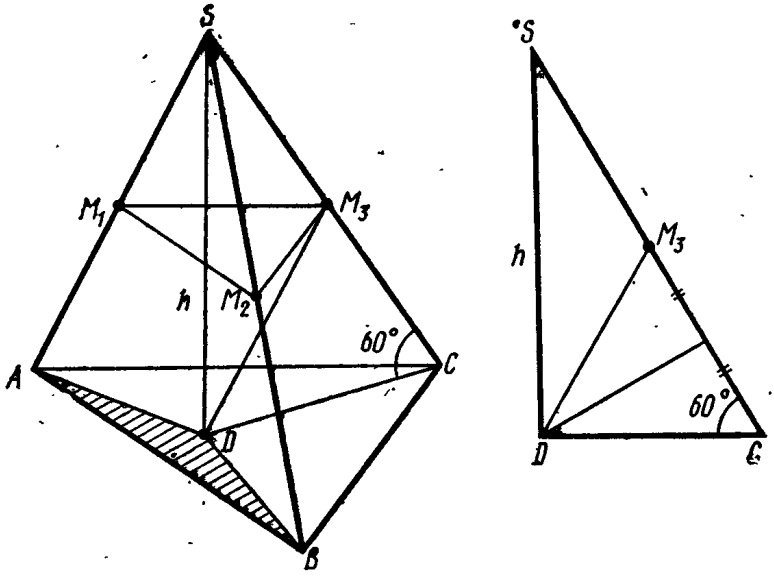


Рис. 73.

этих отрезков: $AD=BD=CD$, т. е. точка D является центром окружности, описанной около основания пирамиды. Поэтому центр шара, о котором идет речь в задаче, расположен на высоте пирамиды SD.

Рассмотрим теперь треугольник SCD с одним из острых углов, равным 60°. Шар пересекается с этим треугольником по окружности, центр которой расположен на SD и проходящей через точки C и M_3. Значит, он лежит на пересечении SD с перпендикуляром, восстановленным из середины отрезка CM_3. Для прямоугольного треугольника с углом SCD, равным 60°, такой точкой будет точка D. Следовательно, центр шара лежит в точке D; $CD=1$, а $SD=h=\sqrt{3}$.

Рассмотрим треугольники SAD и SBD. Поскольку D есть центр шара, проходящего через точки A и B, то $AD=BD=1$. Поэтому треугольники SAD, SBD и SCD равны между собой. В треугольнике ADB: $AD=BD=1$. Сторона AB этого треугольника, равная по условию ребру SC пирамиды, равна 2. Поскольку должно выпол-

няться «неравенство треугольника»

$$AB \leqslant AD + BD,$$

которое превращается в равенство только тогда, когда точка D лежит на стороне AB, то очевидно, что этот случай и имеет здесь место.

Ответ: $h = \sqrt{3}$ *м*.

Задача 5. 1-й способ. Поскольку все корни первого уравнения являются корнями третьего уравнения и хотя бы один корень первого уравнения удовлетворяет второму уравнению, то это означает, что все три уравнения имеют по меньшей мере один общий корень. Обозначим его x_0. Имеем

2) $x_0^2 - b(b+1)x_0 + c = 0$

и

3) $x_0^4 - b(b+1)x_0^2 + c = 0.$

Обозначая x_0^2 через x_1, видим, что x_1 удовлетворяет второму уравнению

$$x_1^2 - b(b+1)x_1 + c = 0.$$

Таким образом, наряду с корнем x_0 второе уравнение имеет корень x_0^2. Покажем, что это различные корни второго уравнения. Если бы

$$x_0^2 = x_0,$$

то $x_0 = 0$ или $x_0 = 1$. Корень $x_0 = 0$ не удовлетворяет первому уравнению, а корень $x_0 = 1$ не подходит в силу условия, что все корни первого уравнения больше единицы.

Поскольку биквадратная функция, стоящая в левой части третьего уравнения, — четная функция, то наряду с корнем $x_0 \neq 0$ третье уравнение должно иметь корень $-x_0$. Кроме того, решая это уравнение относительно x^2, получим действительное решение x_0, которое, как уже отмечалось, положительно и больше единицы. Поэтому третье уравнение имеет еще два действительных корня $\pm\sqrt{x_0}$. Отсюда получаем, что первое уравнение имеет два корня x_0 и $\sqrt{x_0}$.

По теореме Виета находим:

$$\begin{cases} x_0\sqrt{x_0} = 8, \\ x_0 + \sqrt{x_0} = (a+b) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_0^2 = c, \\ x_0 + x_0^2 = b(b+1). \end{cases}$$

Из двух этих систем, учитывая условие $b > 3$, находим параметры a, b и c: $a = 2$, $b = 4$, $c = 64$.

2-й способ. Введем для удобства вычислений новые обозначения параметров

$$a + b = m \text{ и } b(b+1) = k.$$

Рассмотрим условие задачи о том, что все корни первого уравнения являются корнями третьего уравнения. Это означает, что многочлен четвертой степени, стоящий в левой части третьего уравнения, может быть разложен на квадратичные множители, одним из которых является квадратный трехчлен, стоящий в левой части первого уравнения, т. е. должно выполняться тождество:

$$x^4 - kx^2 + c \equiv [x^2 - mx + 8] \cdot [x^2 + \alpha x + \beta].$$

В этом равенстве α и β — коэффициенты второго множителя. Раскрывая скобки, получаем

$$x^4 - kx^2 + c \equiv x^4 + (\alpha - m)\, x^3 + (8 - \alpha m + \beta)\, x^2 + (8\alpha - \beta m)\, x + 8\beta$$

Поскольку это равенство есть тождество, то должны быть равны коэффициенты при одинаковых степенях x в его правой и левой частях. Это приводит к следующим условиям:

$$\begin{cases} \alpha - m = 0, \\ 8 - \alpha m + \beta = -k, \\ 8\alpha - \beta m = 0 \\ c = 8\beta. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = m, \\ \beta = \frac{c}{8}, \\ m\left(8 - \frac{c}{8}\right) = 0, \\ k = m^2 - 8 - \frac{c}{8}. \end{cases}$$

Из третьего равенства видно, что возможны два случая: либо $m=0$, либо $c=64$.

Первый случай невозможен. Если $m=0$, то первое из данных в задаче уравнений не имеет действительных решений. Поэтому $c=64$. Таким образом, имеем два квадратных уравнения

1) $x^2 - mx + 8 = 0$,

2) $x^2 - kx + 64 = 0$,

относительно которых известно, что они имеют по меньшей мере один общий действительный корень.

Заметим, что если два уравнения

$$F_1(x) = 0 \text{ и } F_2(x) = 0$$

имеют общий корень x_0, то этот корень удовлетворяет также и такому уравнению:

$$F_1(x) - F_2(x) = 0$$

(обратное, конечно, не всегда верно). Поэтому если рассматриваемые уравнения имеют общий корень, то этот корень находится

так:

$$(x^2-mx+8)-(x^2-kx+64)=0,$$
$$(k-m)x=56.$$

Поскольку, однако, $k-m\neq 0$, то корень выражается формулой

$$x=\frac{56}{k-m};\ k=m^2-16.$$

Для того чтобы найденное значение общего корня действительно являлось таковым, нужно, чтобы оно удовлетворяло хотя бы одному из уравнений, например первому (тогда второму оно будет удовлетворять автоматически). Имеем

$$\left(\frac{56}{k-m}\right)^2-m\left(\frac{56}{k-m}\right)+8=0.$$

Упрощая это выражение и заменяя k на m^2-16, получим уравнение четвертой степени для определения m:

$$m^4-9m^3-24m^2+144m+648=0.$$

Это уравнение можно преобразовать так:

$$m^3(m-9)-24(m^2-6m-27)=0,$$
$$m^3(m-9)-24(m+3)(m-9)=0,$$
$$(m-9)(m^3-24m-72)=0.$$

Заметим, что число 6 является корнем второго сомножителя, последний можно разложить на множители

$$m^3-24m-72=(m-6)(m^2+6m+12),$$

после чего имеем

$$(m-9)(m-6)(m^2+6m+12)=0.$$

Квадратичный множитель, стоящий в левой части уравнения, не имеет корней. Поэтому все решения уравнения таковы:

$$m_1=9,\ m_2=6.$$

Первое из этих решений не удовлетворяет условиям задачи. В этом случае первое из данных уравнений, которое при $m=9$ приобретает вид

$$x^2-9x+8=0$$

имеет своими корнями числа 8 и 1, т. е. не все его корни строго больше единицы.

При $m=6$ такое условие выполняется. Имеем

$$m=a+b=6;\ k=m^2-16=20;\ b(b+1)=20.$$

Поскольку известно, что $b>3$, то $b=4$. Окончательно находим, что $a=2$.

Ответ: $a=2$, $b=4$, $c=64$.

§ 33. МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, 1973 г.

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\cos 2x + \log_4\left(\frac{1}{2}\sin x\right) + 2\cos x \log_{\frac{1}{2}} \sin x = \\ = 2\cos x + \sin^2 x \log_2 \sin^2 x.$$

2. В трапеции диагонали равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 2. Найти площадь трапеции.

3. Решить неравенство

$$4x + 8\sqrt{2 - x^2} > 4 + (x^2 - x)\,2^x + 2^{x+1} \cdot x \cdot \sqrt{2 - x^2}.$$

4. В треугольной пирамиде $ABCD$ грани ABC и ABD имеют площади p и q и образуют между собой угол α. Найти площадь сечения пирамиды, проходящего через ребро AB и центр вписанного в пирамиду шара.

5. Найти все пары чисел (x, y), удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2}(x-y)^2 - (x-y)^4} = y^2 - 2x^2, \\ y \geqslant 4x^4 + 4yx^2 + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\frac{4}{3}\cos^2\frac{x}{2}\,(1 - \sqrt{\sin x}) = \sqrt{2\cos x} - \sqrt{\sin 2x}.$$

2. В трапеции $ABCD$ точки K и M являются соответственно серединами оснований $AB=5$ и $CD=3$. Найти площадь трапеции, если треугольник AMB — прямоугольный, а DK есть высота трапеции.

3. Решить неравенство

$$12x + \sqrt{3x^4 + 4x^3 - 4x^6}\,\log_2 x^2 > 3\sqrt{3 + 4x - 4x^2} + 4x^3 \log_4 x^4.$$

4. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребро $CD=a$, а перпендикуляр, опущенный из середины ребра AB на CD, равен b и образует равные углы α с гранями ACD и BCD. Найти объем пирамиды.

5. Найти все пары чисел (x, y), удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} y^6 + y^3 + 2x^2 = \sqrt{xy - x^2y^2}, \\ 4xy^3 + y^3 + \frac{1}{2} \geqslant 2x^2 + \sqrt{1 + (2x - y)^2}. \end{cases}$$

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$1+\cos 2x+\cos^2 x\log_{\sqrt{3}}\operatorname{tg}^2 x+3\sin x=2\sin x\cdot\log_{\frac{1}{3}}\operatorname{tg}^2 x.$$

2. В трапеции $ABCD$ точки K и M являются соответственно серединами оснований AB и CD. Известно, что $AM\perp DK$ и $CK\perp BM$, а угол CKD равен 60°. Найти площадь трапеции, если ее высота равна 1.

3. Решить неравенство

$$\sqrt{2-5x-3x^2}+2x>2x\cdot 3^x\cdot\sqrt{2-5x-3x^2}+4x^2\cdot 3^x.$$

4. В треугольной пирамиде $ABCD$ через ребро $AD=a$ и точку E — середину ребра BC — проведено сечение, образующее с гранями ACD и ADB соответственно углы α и β. Найти объем пирамиды, если площадь сечения ADE равна S.

5. Найти все пары чисел (x, y), удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} 4y^2-2x^2=\sqrt{2\,(x+2y)^2-(x+2y)^4}, \\ x^4+2\leqslant 4y\,(x^2-1). \end{cases}$$

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$2\cos^{\frac{5}{2}}x-\cos 2x=1+\frac{\sin x}{\sqrt{\ }}\,(1-\sqrt{\cos x}).$$

2. В трапеции $ABCD$ точка K — середина основания AB, M — середина основания CD. Найти площадь трапеции, если известно, что DK есть биссектриса угла D, BM есть биссектриса угла B, наибольший из углов при нижнем основании равен 60°, а периметр равен 30.

3. Решить неравенство

$$5x+\sqrt{6x^2+x^3-x^4}\log_2 x>(x^2-x)\log_2 x+ \\ +5+5\sqrt{6+x-x^2}.$$

4. Точки K и M являются серединами ребер AB и AC треугольной пирамиды $ABCD$ с площадью основания p. Найти площадь грани BCD, если сечение DKM имеет площадь q, а основание высоты пирамиды попадает в точку пересечения медиан основания ACB.

5. Найти все пары чисел (x, y), удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2y^2-x^4y^4}=y^5+x^2\,(1-x), \\ \sqrt{1+(x+y)^2}+x\,(2y^3+x^2)\leqslant 0. \end{cases}$$

Разбор варианта 1

Задача 1. Допустимыми в этом уравнении являются те значения x, для которых выполняется неравенство

$$\sin x > 0.$$

Используя формулы теории логарифмов, запишем это уравнение в более простом виде:

$$\cos 2x + \frac{1}{2}\log_2 \sin x - \frac{1}{2} - 2\cos x \log_2 \sin x =$$

$$= 2\cos x + 2\sin^2 x \log_2 \sin x \ .$$

или

$$\log_2 \sin x \left[-\frac{1}{2} - 2\cos x + \cos 2x \right] + \left[\cos 2x - \frac{1}{2} - 2\cos x \right] = 0.$$

Разлагая последнее уравнение на множители, получим

$$(\log_2 \sin x + 1)\left(\cos 2x - \frac{1}{2} - 2\cos x \right) = 0.$$

Если

$$\log_2 \sin x + 1 = 0,$$

то это означает, что

$$\sin x = \frac{1}{2}, \ x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n.$$

Если

$$\cos 2x - \frac{1}{2} - 2\cos x = 0,$$

то

$$4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0:$$

а) $\cos x = \frac{5}{4}$, решений нет;

б) $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Учитывая, что $\sin x > 0$, получаем:

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n.$$

Ответ:

$$1) \ x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n; \ 2) \ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n.$$

Задача 2. Пусть $AC=3$ и $BD=5$ диагонали трапеции $ABCD$, пересекающиеся в точке O (рис. 74). Покажем, что в трапеции отрезок, соединяющий середины оснований, всегда проходит через точку пересечения диагоналей. Это можно сделать многими способами. Приведем один из них.

Соединим середины оснований, точки E и F, с точкой O и покажем, что линия EOF — прямая. Рассмотрим $\triangle OEC$ и $\triangle OFA$. Легко видеть, что они подобны. Действительно, $\angle OAF=\angle OCE$, $AO:CO=AF:CE$. Последнее равенство следует из подобия треугольников OBC и OAD, а также равенств $EC=\frac{1}{2}BC$ и $AF=\frac{1}{2}AD$. Из подобия треугольников OEC и OFA вытекает равенство углов EOC и FOA, которые являются, таким образом, вертикальными. Отсюда следует, что линия EOF — прямая.

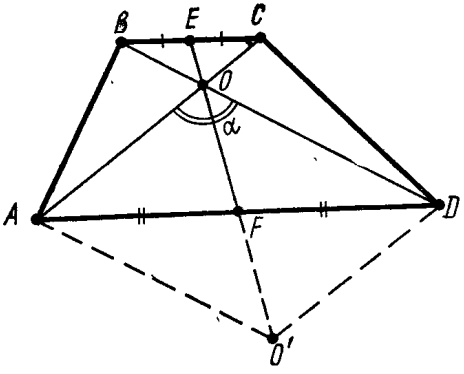


Рис. 74.

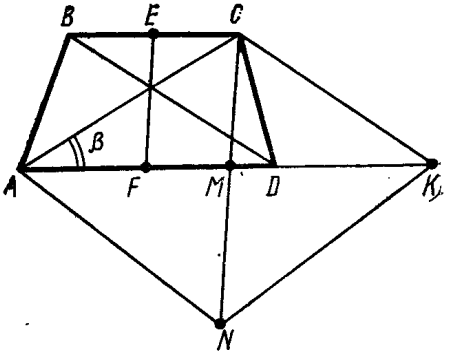


Рис. 75.

Площадь трапеции $ABCD$ можно вычислить по ее диагоналям и углу между ними:

$$S=\frac{1}{2}BD\cdot AC\cdot\sin\alpha=7{,}5\sin\alpha.$$

Поэтому постараемся найти синус угла между диагоналями. Обозначим угол AOD в $\triangle AOD$ посредством α. Тогда по теореме косинусов будем иметь:

$$AD^2=AO^2+OD^2-2AO\cdot OD\cdot\cos\alpha$$

или

$$a^2=\left(\frac{a}{a+b}\right)^2(34-30\cos\alpha).$$

Достроив $\triangle AOD$ до параллелограмма $AODO'$, в котором точка F служит точкой пересечения диагоналей, воспользуемся теоремой о соотношении между сторонами и диагоналями параллелограмма

$$AD^2+O'O^2=2\cdot AO^2+2OD^2$$

или

$$a^2+\left(4\cdot\frac{a}{a+b}\right)^2=2\left(3\cdot\frac{a}{a+b}\right)^2+2\left(5\cdot\frac{a}{a+b}\right)^2.$$

Подставляя сюда найденное значение для a^2, получим

$$\cos\alpha=-\frac{3}{5}.$$

Отсюда следует, в частности, что угол α — тупой. Синус этого угла вычисляется следующим образом:

$$\sin\alpha=\sqrt{1-9/25}=\frac{4}{5}.$$

Затем находится площадь трапеции:

$$S=7{,}5\cdot\frac{4}{5}=6.$$

Ответ: 6.

2-й способ. Проведем через вершину трапеции C линию CK, параллельную диагонали BD, до пересечения с основанием AD. Обозначим точку пересечения буквой K. Проведем также $CM\|EF$ (рис. 75). Достроим треугольник ACK до параллелограмма $ACKN$, продолжив CM за точку M на величину $MN=CM$. Угол CAD обозначим β.

Отрезок AK равен, очевидно, сумме оснований трапеции, а точка M делит этот отрезок пополам. Действительно, имеем

$$AM=AF+FM=\frac{1}{2}AD+\frac{1}{2}BC.$$

Поскольку $AM=MK$, $CM=MN=2$, по построению, то $ACKN$ — параллелограмм. Используя формулу, связывающую сумму квадратов диагоналей параллелограмма и сумму квадратов его сторон, получаем

$$AK^2+CN^2=2\cdot AC^2+2\cdot CK^2,$$
$$AK^2=18+50-16=52,$$
$$AK=2\sqrt{13}.$$

Итак, полусумма оснований трапеции равна $\sqrt{13}$.

Определим теперь высоту трапеции. Для этого вычислим сначала угол β. Используя теорему косинусов в треугольнике ACK, находим

$$CK^2=AC^2+AK^2-2\cdot AC\cdot AK\cdot\cos\beta,$$
$$25=9+52-2\cdot3\cdot2\sqrt{13}\cos\beta.$$

Отсюда определяем

$$\cos\beta=\frac{3}{\sqrt{13}}\text{ и }\sin\beta=\frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Высота трапеции h определяется формулой

$$h = AC \cdot \sin\beta,$$

откуда

$$h = \frac{6}{\sqrt{13}}.$$

Площадь трапеции равна

$$S = \frac{1}{2} AK \cdot h, \quad S = 6.$$

Задача 3. Неравенство

$$4x + 8\sqrt{2 - x^2} > 4 + (x^2 - x)\,2^x + 2^{x+1} \cdot x\sqrt{2 - x^2}$$

будем решать следующим образом: сначала сгруппируем члены

$$4x - (x^2 - x)\,2^x - 4 > 2\sqrt{2 - x^2}\,(x \cdot 2^x - 4),$$

$$(x \cdot 2^x - 4) - x\,(x2^x - 4) > 2\sqrt{2 - x^2}\,(x2^x - 4);$$

затем разложим на множители

$$2\sqrt{2 - x^2}\,(x2^x - 4) < (x2^x - 4)\,(1 - x)$$

и, наконец, решим неравенство

$$(x2^x - 4)\,(2\sqrt{2 - x^2} + x - 1) < 0.$$

Возможны два случая:

$$1)\ \begin{cases} x2^x - 4 > 0 \\ 2\sqrt{2 - x^2} + x - 1 < 0 \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x2^x - 4 < 0 \\ 2\sqrt{2 - x^2} + x - 1 < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим первый случай. Здесь легко решить второе неравенство системы. Для $-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$, составляющих область определения радикала в левой части неравенства

$$2\sqrt{2 - x^2} < 1 - x,$$

имеем $x < 1$. Тогда это неравенство равносильно следующему неравенству:

$$4(2 - x^2) < 1 - 2x + x^2$$

или

$$5x^2 - 2x - 7 > 0,$$

$$x > \frac{7}{5}, \quad x < -1;$$

$$-\sqrt{2} \leqslant x < -1.$$

Легко заметить, что найденные значения x не удовлетворяют первой системе неравенств. Если подставлять отрицательные значения x в неравенство

$$x \cdot 2^x > 4,$$

то получится противоречие. Поэтому рассмотрим второй случай.

Второе неравенство системы (2) нужно решать при том же ограничении: $-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$. Имеем

$$2\sqrt{2-x^2} > 1-x.$$

Здесь требуется рассматривать два варианта:

а) $1 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$, б) $-\sqrt{2} \leqslant x < 1$.

Все значения x из первого варианта удовлетворяют рассматриваемому неравенству, так как правая часть этого неравенства положительная, а левая часть — меньше или равна нулю. Поэтому осталось проверить, выполняется ли первое неравенство системы (2). Перепишем это неравенство в следующем виде:

$$x2^x < 4.$$

Заметим, что левая часть неравенства представляет собой произведение двух монотонно возрастающих сомножителей и, значит, сама растет с ростом x. Поэтому если мы возьмем наибольшее значение x из отрезка $1 \leqslant x \leqslant 2$ и покажем, что оно удовлетворяет этому неравенству, то этим самым мы покажем, что и все значения x, составляющие первый вариант, удовлетворяют этому неравенству. Имеем

$$\sqrt{2} \cdot 2^{\sqrt{2}} < 4,$$

$$2^{\sqrt{2}} < 2^{1,5},$$

так как $\sqrt{2} < 1,5$, то неравенство доказано. Итак, $1 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$ являются решениями задачи.

Рассмотрим второй вариант. В этом случае можно возвести обе части исходного неравенства в квадрат, получив при этом равносильное неравенство

$$5x^2 - 2x - 7 < 0.$$

Отсюда находим, учитывая ограничение $-\sqrt{2} \leqslant x < 1$, что

$$-1 < x < 1.$$

Поскольку все найденные значения x меньше, чем число $\sqrt{2}$, то в силу причины, указанной выше, они служат решениями задачи. Объединяя все решения задачи, получим ответ.

Ответ: $-1 < x \leqslant \sqrt{2}$.

Задача 4. Пусть $ABCD$ — произвольная треугольная пирамида (рис. 76). Обозначив высоту DE грани ABD, опущенную из вершины D на основание AB, через h_1, соответственно высоту CF грани ABC обозначим h_2.

Плоскость ABM, проходящая через центр вписанного в пирамиду шара, является, очевидно, бисекторной плоскостью для угла между гранями ABC и ABD. Обозначим высоту MK треугольника ABM, проведенную из вершины M к основанию AB, через l.

Поскольку все три отрезка DE, MK и CF перпендикулярны ребру AB, можно записать

$$p=\frac{1}{2}AB\cdot h_1$$

$$q=\frac{1}{2}AB\cdot h_2,\ S=\frac{1}{2}AB\cdot l.$$

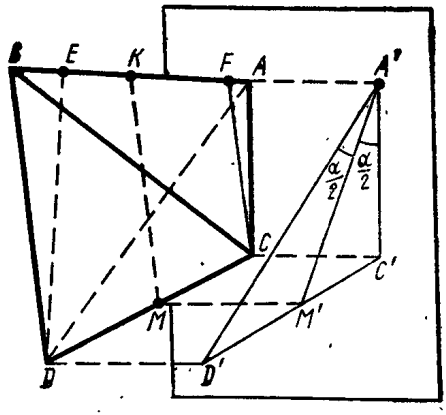


Рис. 76.

Здесь S — площадь искомого сечения.

Величину отрезка MK легко найти. Этот отрезок служит биссектрисой угла α в треугольнике $D'A'C'$, получающемся проектированием пирамиды $ABCD$ на плоскость, перпендикулярную ребру AB (рис. 76). При этом точки A, B, E, F, K проектируются в одну точку, длины отрезков DE, CF и KM сохраняются, а угол $D'A'C'$ является двугранным углом пирамиды при ребре AB.

Запишем площадь треугольника $D'A'C'$ двумя способами:

$$S_{D'A'C'}=\frac{1}{2}h_1\cdot h_2\sin\alpha$$

и

$$S_{D'A'C'}=\frac{1}{2}h_1 l\sin\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}h_2 l\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Сравнивая эти два выражения между собой, получим

$$l=\frac{2h_1h_2\cos\frac{\alpha}{2}}{h_1+h_2}.$$

Подставляя сюда выражения для h_1 и h_2 находим *ответ*:

$$S=\frac{2pq\cos\frac{\alpha}{2}}{p+q}.$$

Задача 5. При решении этой задачи необходимо проявить определенную находчивость и наблюдательность. Заметим, что выражение, стоящее под знаком радикала в уравнении, представляет

собой квадратный трехчлен относительно квадрата разности x и y. Нетрудно установить, что выполняются неравенства

$$0 \leqslant \frac{1}{2}(x-y)^2 - (x-y)^4 \leqslant \frac{1}{16}$$

так, что

$$0 \leqslant \sqrt{\frac{1}{2}(x-y)^2 - (x-y)^4} \leqslant \frac{1}{4}.$$

Таким образом, находим, что

$$y^2 - 2x^2 \leqslant \frac{1}{4}$$

или

$$x^2 \geqslant \frac{4y^2-1}{8}. \qquad (1)$$

Это неравенство во всяком случае необходимо для того, чтобы пара чисел (x, y) удовлетворяла исходной системе.

Обратимся теперь к неравенству, входящему в эту систему. Рассматривая его как квадратное неравенство относительно x^2, т. е.

$$4x^4 + 4yx^2 + \frac{1}{2} - y \leqslant 0,$$

найдем, что при условии неотрицательности дискриминанта

$$D = 4y^2 + 4y - 2$$

выполняются ограничения

$$\frac{-2y - \sqrt{4y^2+4y-2}}{4} \leqslant x^2 \leqslant \frac{-2y + \sqrt{4y^2+4y-2}}{4}. \qquad (2)$$

Сравнивая неравенства (1) и (2), исследуем вопрос об их непротиворечивости. Эти неравенства несовместимы, если

$$\frac{4y^2-1}{8} > \frac{-2y + \sqrt{4y^2+4y-2}}{4},$$

или

$$4y^2 - 1 > -4y + 2\sqrt{4y^2+4y-2},$$

$$(4y^2+4y-2) - 2\sqrt{4y^2+4y-2} + 1 > 0,$$

$$(\sqrt{4y^2+4y-2} - 1)^2 > 0.$$

Последнее неравенство выполняется при всех допустимых значениях y, кроме случая, когда

$$\sqrt{4y^2+4y-2} = 1$$

или

$$4y^2 + 4y - 3 = 0;\ y_1 = \frac{1}{2},\ y_2 = -\frac{3}{2}.$$

Таким образом, почти при всех значениях y неравенства (1) и (2) несовместны. Исследуем два случая.

1) $y_1 = 1/2$.

Неравенства (1) и (2) дают

$$\begin{cases} x^2 \geqslant 0 \\ -1/2 \leqslant x^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

Отсюда находим $x=0$. Непосредственной проверкой (достаточность) убеждаемся, что пара чисел $(0, 1/2)$ составляет решение задачи.

2) $y_2 = -3/2$.

Неравенства (1) и (2) дают:

$$\begin{cases} x^2 \geqslant 1 \\ 1/2 \leqslant x^2 < 1. \end{cases}$$

Отсюда находим $x^2=1$ или $x_1=1$, $x_2=-1$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что только одна пара чисел составляет решение задачи: $(-1, -3/2)$.

Ответ: $(0, 1/2)$; $(-1, -3/2)$.

§ 34. МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, 1974 г.

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\sqrt{1+\sin x} + \cos x = 0.$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{1 - \log_5 (x^2 - 2x + 2)} < \log_5 (5x^2 - 10x + 10).$$

3. Вокруг треугольника ABC описана окружность. Медиана AD продолжена до пересечения с этой окружностью в точке E. Известно, что $AB+AD=DE$, угол $BAD=60^\circ$ и $AE=6$. Найти площадь треугольника ABC.

4. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребро $DC=9$, ребро $DB=AD$, а ребро AC перпендикулярно к грани ABD. Сфера радиуса 2 касается грани ABC, ребра DC, а также грани DAB в точке пересечения ее медиан. Найти объем пирамиды.

5. Найти все действительные значения a, для каждого из которых существуют четыре целых числа (x, y, u, v), удовлетворяющие равенствам

$$x^2 + y^2 = (111 - a)(a - 89),$$
$$50(u^2 - v^2) = a(15u + 5v - a).$$

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\sqrt{2\sin 2x}+2\sin x=0.$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{1+\log_2(7x^2+14x+8)}\leqslant 1+\log_6(7x^2+14x+8).$$

3. Вокруг треугольника ABC описана окружность. Через точку B проведена касательная к этой окружности до пересечения с продолжением стороны CA в точке D. Известно, что $AB+AD=AC$, отрезок $CD=3$, угол $BAC=60°$. Найти периметр треугольника ABC.

4. В основании треугольной пирамиды $ABCD$ лежит треугольник ABC, в котором угол $BAC=60°$, а угол ACB прямой. Грань BCD образует угол в 60° с гранью ABC. Ребро $BD=2$. Сфера касается ребер AB, AC и грани BCD. Центр сферы — точка O лежит на основании пирамиды, и отрезок OD перпендикулярен плоскости основания пирамиды $ABCD$. Найти длину ребра AC.

5. Найти все действительные значения a, для каждого из которых существуют четыре натуральных числа (x, y, u, v), удовлетворяющие равенством

$$(x+y)(x+y+20)=(140-a)(a-80),$$
$$a(8u^2+2v^2-a)=(4u^2-v^2)^2.$$

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$\sqrt{1+\cos x}=\sin x.$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{\log_4(2+4x-x^2)}>\log_2(1+2x-x^2).$$

3. Окружность радиуса 1 вписана в треугольник ABC, в котором $\cos\angle ABC=0{,}8$. Эта окружность касается средней линии треугольника ABC, параллельной стороне AC. Найти длину стороны AC.

4. В основании треугольной пирамиды $ABCD$ лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC=15$ и $BC=20$. Боковое ребро DC перпендикулярно к плоскости основания. Сфера касается основания ABC, ребра CD и боковой грани ABD в точке P, которая лежит на высоте треугольника ABD, опущенной из точки D. Известно, что $DP=6$. Найти объем пирамиды.

5. Найти все действительные значения a, для каждого из которых существуют четыре целых числа (x, y, u, v), удовлетворяю-

щие равенствам

$$x^2+y^2=(107-a)(a-91),$$
$$54(u^2-v^2)=a(15u+3v-a).$$

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$\sqrt{\cos x}+\sqrt[4]{2}\sin x=0.$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(4x-3-x^2)}>\log_3(4x-3-x^2).$$

3. Окружность радиуса 3 проходит через вершину B, середины сторон AB и BC, а также касается стороны AC треугольника ABC. Угол BAC острый, и $\sin\angle BAC=1/3$. Найти площадь треугольника ABC.

4. В основании треугольной пирамиды $ABCD$ лежит правильный треугольник ABC. Грань BCD образует с плоскостью основания угол 60°. На прямой, проходящей через точку D перпендикулярно основанию, лежит центр сферы единичного радиуса, которая касается ребер AB, AC и грани BCD. Высота пирамиды DH в два раза меньше стороны основания. Найти объем пирамиды.

5. Найти все действительные значения a, для каждого из которых существуют четыре натуральных числа (x, y, u, v), удовлетворяющие равенствам

$$xy(40+xy)=(150-a)(a-90),$$
$$a(8u^2+18v^2-a)=(4u^2-9v^2)^2.$$

Разбор варианта 2

Задача 1. При решении этого уравнения необходимо принять во внимание ограничения, связанные с ОДЗ, и условия, позволяющие после возвышения в квадрат получить уравнение, равносильное исходному. Поэтому исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\sin 2x\geqslant 0,\\ \sin x\leqslant 0,\\ 2\sin 2x=(-2\sin x)^2.\end{cases}$$

Анализируя эту систему, можно заметить, что структура уравнения такова, что для его решений выражение $\sin 2x$ равно квадрату некоторого действительного числа и, следовательно, автоматически

будет неотрицательным. Поэтому систему можно упростить:

$$\begin{cases} \sin x \leqslant 0, \\ \sin 2x = 2\sin^2 x. \end{cases}$$

Из уравнения находим

1) $\sin x = 0$, $x = \pi n$,

2) $\operatorname{tg} x = 1$, $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$.

В последнем случае, естественно, берутся только те значения неизвестного, для которых $\sin x \leqslant 0$.

Ответ: $x = \pi n$; $x = 5\pi/4 + 2\pi n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$.

Задача 2. Обозначим $\log_2(7x^2+14x+8)$ буквой t. Тогда данное неравенство примет вид

$$\sqrt{1+t} \leqslant 1 + \frac{1}{3}t.$$

Его решения находятся из системы неравенств

$$\begin{cases} 1+t \geqslant 0, \\ 1+\frac{1}{3}t \geqslant 0, \\ 1+t \leqslant \left(1+\frac{1}{3}t\right)^2 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} t^2 - 3t \geqslant 0, \\ t+1 \geqslant 0. \end{cases}$$

Отсюда находим $-1 \leqslant t \leqslant 0$; $t \geqslant 3$. После этого имеем:

1) $-1 \leqslant \log_2(7x^2+14x+8) \leqslant 0$,

$$\frac{1}{2} \leqslant 7x^2+14x+8 \leqslant 1$$

или

$$\begin{cases} x^2+2x+1 \leqslant 0, \\ x^2+2x+\frac{15}{14} \geqslant 0. \end{cases}$$

Первое неравенство может выполняться лишь при одном значении переменной, $x = -1$, второе неравенство выполняется тождественно. Следовательно, $x = -1$;

2) $\log_2(7x^2+14x+8) \geqslant 3$,

$$7x^2+14x+8 \geqslant 8,$$

$$x \geqslant 0 \text{ и } x \leqslant -2.$$

Ответ: $x \leqslant -2$, $x = -1$, $x \geqslant 0$.

Задача 3. Пусть $AB=x$, $AD=y$, рис. 77. По теореме о «касательной и секущей, проведенными к окружности из одной точки» имеем: $DB^2=AD\cdot DC$. Применяя теорему косинусов к треугольнику ABD, а также учитывая, что $AB+AD=AC$ и, следовательно, $DC=AD+AC=x+2y$, получим:

$$x^2+y^2-2xy\cos\frac{2\pi}{3}=y(x+2y)$$

или

$$x^2+y^2+xy=xy+2y^2,\ x=y.$$

Значит, в $\triangle ABC$ $AC=2x$, и этот треугольник — прямоугольный. Далее находим:

$$BC=AC\cdot\sin\frac{\pi}{3}=2x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=x\sqrt{3},$$

$$P_{ABC}=x+2x+x\sqrt{3}=x(3+\sqrt{3}),$$

где P_{ABC} — периметр треугольника ABC. Так как $DC=3x=3$, то $x=1$.

Ответ: $3+\sqrt{3}$.

Задача 4. На рис. 78 дан чертеж к этой задаче. OK, OP и OM — радиусы данной сферы, проведенные в точки касания K, P и M с ребрами AB, AC и гранью BCD соответственно. DN — прямая, проведенная через вершину пирамиды D и точку M. Очевидно, что $BC\perp DN$. Это следует из тео-

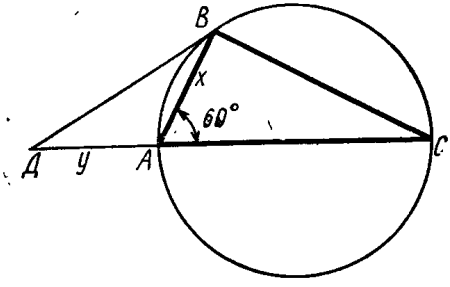


Рис. 77.

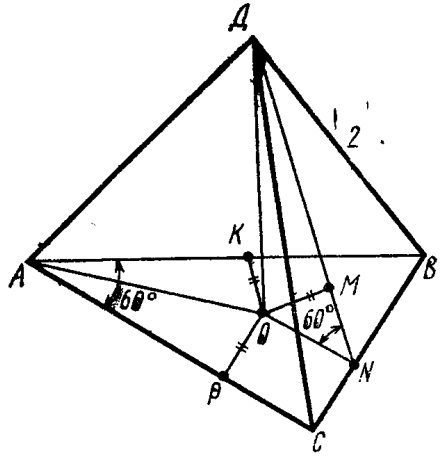


Рис. 78.

ремы «о трех перпендикулярах», поскольку $OD\perp$ пл. ABC по условию. Очевидно также, что прямая AO — биссектриса угла A основания пирамиды.

Поскольку $BC\perp DN$ и $BC\perp OM$, то $BC\perp ON$. Поэтому угол $OND=60°$ является линейным углом двугранного угла между боковой гранью BCD и плоскостью основания пирамиды.

Из прямоугольного треугольника OND находим DN:

$$DN=\frac{OD}{\sin\angle OND}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot OD.$$

Из прямоугольного треугольника OMD находим OD:

$$OD=\frac{OM}{\sin\angle ODM}=2\cdot OM.$$

Поскольку $OM=OP=OK=R$, то $OD=2R$, где R — радиус сферы. Тогда

$$DN=\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot R.$$

Очевидно, что $CN=OP=R$ и $CP=ON$, так как угол C — прямой по условию. В треугольнике OMN: $OM\perp MN$, а $ON=OM:\sin\frac{\pi}{3}$, т. е. $CP=ON=2R/\sqrt{3}$. Из прямоугольного треугольника AOP находим:

$$AP=OP\cdot\operatorname{ctg}\angle AOP=R\sqrt{3}$$

и

$$AC=AP+PC=R\sqrt{3}+2R/\sqrt{3}=5R/\sqrt{3}.$$

Из прямоугольного треугольника ABC имеем:

$$BC=AC\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=5R$$

и

$$NB=BC-CN=4R.$$

Наконец, используя теорему Пифагора, примененную к треугольнику BDN, составляем уравнение для определения радиуса сферы R:

$$\left(\frac{4R}{\sqrt{3}}\right)^2+(4R)^2=4.$$

Из этого уравнения получаем, что $R=\sqrt{3}/4$. Тогда

$$AC=\frac{5R}{\sqrt{3}}=\frac{5}{4}.$$

Ответ: 5/4.

Задача 5. Преобразуем второе равенство следующим образом:

$$2a(4u^2+v^2)-a^2=(4u^2-v^2)^2,$$
$$-a^2+2a(4u^2+v^2)-(4u^2+v^2)^2=(4u^2-v^2)^2-(4u^2+v^2)^2,$$
$$-[a-(4u^2+v^2)]^2=(4u^2-v^2-4u^2-v^2)(4u^2-v^2+4u^2+v^2),$$
$$-(a-4u^2-v^2)^2=-2v^2\cdot 8u^2,$$
$$|a-4u^2-v^2|=4uv,$$
$$a=(2u\pm v)^2.$$

Поскольку u и v натуральные числа, то число a должно быть точным квадратом некоторого натурального числа (или 0).

Левая часть первого равенства положительна. Поэтому

$$(140-\alpha)(\alpha-80)>0,$$

т. е. α должно удовлетворять условиям $80<\alpha<140$. В этом интервале существуют три числа, являющиеся точными квадратами целых чисел: 81, 100, 121.

Из первого равенства для суммы $(x+y)$ получается квадратное уравнение, которое, очевидно, должно иметь целые решения. Однако только при $\alpha=100$ это условие выполняется. Таким образом, решением данной задачи служит число 100.

Ответ: $\alpha=100$.

§ 35. МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, 1975 г.

Вариант 1

1. Решить неравенство

$$98-7^{x^2+5x-48}\geqslant 49^{x^2+5x-49}.$$

2. Найти все пары действительных чисел (x, y), удовлетворяющих условию $x>0$ и системе уравнений

$$\begin{cases} \sin[(x-\sqrt{\pi})^2+y^2]=0, \\ \log_{\sqrt{2\pi}}\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2\log_{2\pi}\sqrt{x^2+y^2}}=2. \end{cases}$$

3. Два равных равнобедренных треугольника ABC и DBE ($AB=BC=BD=BE$) имеют общую вершину B и лежат в одной плоскости так, что точки A и C находятся по разные стороны от прямой BD, а отрезки AC и DE пересекаются в точке K. Известно, что $\angle ABC=\angle DBE=\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\angle AKD=\beta<\alpha$. В каком отношении прямая BK делит угол ABC?

4. Сфера радиуса $3/8$ вписана в четырехугольную пирамиду $SABCD$, у которой основанием служит ромб $ABCD$ такой, что $\angle BAD=60°$; высота пирамиды, равная 1, проходит через точку K пересечения диагоналей ромба. Доказать, что существует единственная плоскость, пересекающая ребра основания AB и AD в некоторых точках M, N таких, что $MN=4\sqrt{3}/5$, касающаяся сферы в точке, удаленной на равные расстояния от точек M и N, и пересекающая продолжение отрезка SK за точку K в некоторой точке E. Найти длину отрезка SE.

5. Без помощи таблиц найти все значения x в промежутке $-0,5<x<1,5$, удовлетворяющие равенству

$$\log_2\left(\sin 3x-\cos 2x-\frac{3}{10}\right)=\log_2\left(\sin 7x-\cos 6x-\frac{3}{10}\right).$$

Вариант 2

1. Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{3}-}(x^2+4x+6)+6\sqrt{\log_3(x^2+4x+6)}\geqslant 8.$$

2. Найти все пары действительных чисел (x, y), удовлетворяющие условию $y\geqslant 0$ и системе уравнений

$$\begin{cases} 4^{x^2+(y+1)^2}-32=31\cdot 2^{x^2+(y+1)^2}, \\ \cos[\pi(x^2+y^2)]=1. \end{cases}$$

3. Два равных ромба $ABCD$ ($AB\|CD$, $AD\|BC$) и $APQR$ ($AP\|QR$, $AR\|PQ$) имеют общую вершину A и лежат в одной плоскости. Известно, что $\angle BAD=\angle PAR=\alpha<\pi/2$, точка R лежит внутри ромба $ABCD$ и угол RAD равен β. Стороны BC и QR пересекаются в точке K. Найти величину угла BAK.

4. В правильную треугольную пирамиду $SABC$ с вершиной S и основанием ABC вписан шар единичного радиуса; двугранный угол между основанием пирамиды и боковой гранью равен 60°. Доказать, что существует единственная плоскость, пересекающая ребра основания AB и BC в некоторых точках M и N таких, что $MN=5$, касающаяся шара в точке, удаленной на равные расстояния от точек M и N, и пересекающая продолжение высоты пирамиды SK за точку K в некоторой точке D. Найти длину отрезка SD.

5. Без помощи таблиц найти все значения x в промежутке $-4<x<-2{,}5$, удовлетворяющие равенству

$$\log_{\frac{1}{5}}\left(\sin x-\cos 6x+\frac{2}{3}\right)=\log_{\frac{1}{5}}\left(\sin 3x-\cos 8x+\frac{2}{3}\right).$$

Вариант 3

1. Решить неравенство

$$\frac{75-25^{x^2+6x-15}}{2}\geqslant 5^{x^2+6x-14}.$$

2. Найти все пары действительных чисел (x, y), удовлетворяющие условию $x>0$ и системе уравнений

$$\begin{cases} \sin[(x+\sqrt{2\pi})^2+y^2]=0, \\ \sqrt{2\log_{\sqrt{x}-}(x^2+y^2)}+2\log_x\sqrt{x^2+y^2}=3. \end{cases}$$

3. Два равных равнобедренных треугольника ABC и DBF ($AC=BC=BD=DF$) имеют общую вершину B и лежат в плоскости так, что точки C и D находятся по разные стороны от прямой AB, отрезки AC и DF пересекаются в точке K. В каком отношении прямая BK делит угол ABC, если $\angle DBF=\alpha$, $\angle CBF=\beta<\alpha$?

4. Сфера радиуса $^3/_8$ вписана в четырехугольную пирамиду $SABCD$, у которой основанием служит ромб $ABCD$ такой, что

$\angle BAD=120°$; высота пирамиды проходит через точку K пересечения диагоналей ромба, а ребро SB наклонено к основанию под углом $\operatorname{arctg} 2\sqrt{3}$. Доказать, что существует единственная плоскость, пересекающая ребра основания AB и AD в некоторых точках M и N таких, что $MN=2\sqrt{3}/7$, касающаяся сферы в точке, удаленной на равные расстояния от точек M и N, и пересекающая продолжение отрезка SK за точку K в некоторой точке E. Найти длину отрезка SE.

5. Без помощи таблиц найти все значения x в промежутке $-3<x<-1{,}5$, удовлетворяющие равенству

$$\log_6\left(\sin 2x+\cos 3x-\frac{5\sqrt{3}}{6}\right)=\log_6\left(\sin 6x+\cos 7x-\frac{5\sqrt{3}}{6}\right).$$

Вариант 4

1. Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{2}-1}(x^2-2x+8)+2\sqrt{\log_2(x^2-2x+8)}\geqslant 12.$$

2. Найти все пары действительных чисел (x, y), удовлетворяющие условию $y\leqslant 0$ и системе уравнений

$$\begin{cases} 9^{x^3+(y-1)^3}-27=26\cdot 3^{x^3+(y-1)^3}, \\ \cos[2\pi\cdot(x^2+y^2)]=1. \end{cases}$$

3. Два равных ромба $ABCD$ ($AB\parallel CD$, $AD\parallel BC$) и $APQR$ ($AP\parallel QR$, $AR\parallel PQ$) имеют общую вершину A и лежат в одной плоскости. Известно, что $\angle BAD=\angle PAR=\alpha<\pi/2$, $\angle QAC=\beta$. Продолжения сторон BC и QR пересекаются в точке K. Ромбы расположены в разных полуплоскостях относительно прямой AK и в одной полуплоскости относительно прямой AD. Найти угол KAD.

4. В правильную треугольную пирамиду $SABC$ с вершиной S и основанием ABC вписан шар радиуса 2; высота пирамиды SK равна 6. Доказать, что существует единственная плоскость, пересекающая ребра основания AB и BC в некоторых точках M и N таких, что $MN=7$, касающаяся шара в точке, удаленной на равные расстояния от точек M и N, и пересекающая продолжение высоты пирамиды SK за точку K в некоторой точке D. Найти длину отрезка SD.

5. Без помощи таблиц найти все значения x в промежутке $-7/4<x<-1/2$, удовлетворяющие равенству

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\cos x+\sin 6x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\log_{\frac{1}{2}}\left(\cos 3x+\sin 8x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Разбор варианта 1

Задача 1. Введем обозначение

$$t=7^{x^2+5x-49}>0.$$

Тогда имеем квадратное относительно t неравенство

$$t^2+7t-98\leqslant 0,$$

откуда находим, что $-14\leqslant t\leqslant 7$. Далее имеем:

$$7^{x^2+5x-49}\leqslant 7,$$

$$x^2+5x-49\leqslant 1;\ x^2+5x-50\leqslant 0.$$

Отсюда получаем решения: $-10\leqslant x\leqslant 5$.

Ответ: $-10\leqslant x\leqslant 5$.

Задача 2. Упростим сначала второе уравнение системы. Для этого обозначим буквой t выражение

$$\log_{\sqrt{2\pi}}\sqrt{x^2+y^2}.$$

Тогда получим квадратное уравнение

$$(\sqrt{t})^2+\sqrt{t}-2=0,$$

из которого находим, что $t=1$. Значит, $x^2+y^2=2\pi$.

Из первого уравнения системы следует, что

$$(x-\sqrt{\pi})^2+y^2=\pi n,$$

где целый параметр n принимает значения: 0, 1, 2, 3 .... Если последнее соотношение упростить с учетом равенства $x^2+y^2=2\pi$, то получим:

$$2x\sqrt{\pi}=3\pi-\pi n.$$

Поскольку $x>0$, то возможны только три значения n: 0, 1, 2. Два из них дают решения задачи:

1) $n=1$: $x=\sqrt{\pi}$; 2) $n=2$: $x=\sqrt{\pi}/2$; $y=\pm\sqrt{7\pi}/2$.
$y=\pm\sqrt{\pi}$.

Ответ: $x=\sqrt{\pi}$, $y=\pm\sqrt{\pi}$; $x=\sqrt{\pi}/2$, $y=\pm\sqrt{7\pi}/2$.

Задача 3. Легко понять, что равнобедренный треугольник DBE получается из равного ему равнобедренного треугольника ABC поворотом на угол φ вокруг вершины B, рис. 79. Поскольку угол AKD измеряется полусуммой дуг AD и CE окружности с центром в точке B и, кроме того, эти дуги равны между собой, то $\varphi=\beta$.

Точка пересечения K отрезков AC и DE может рассматриваться как точка пересечения диагоналей равнобочной трапеции $ADCE$, вписанной в окружность с центром в точке B. Поэтому угол ABK равен половине угла ABE, т. е.

$$\angle ABK=\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

После этого легко вычисляется угол KBC:

$$\angle KBC=\alpha-\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\alpha-\beta}{2}$$

и отношение углов ABK и KBC, равное $(\alpha+\beta)/(\alpha-\beta)$.

Заметим, что условие $\beta<\alpha$ есть условие, гарантирующее, что отрезки AC и DE пересекаются.

Ответ: $(\alpha+\beta)/(\alpha-\beta)$.

Задача 4. Чертежи к задаче представлены на рисунках 80 и 81.

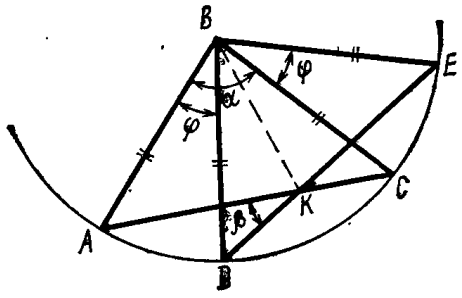


Рис. 79.

Сначала найдем размеры пирамиды $SABCD$. Обозначим сторону ее основания AD буквой a. Тогда высота ромба $ABCD$ равна $a\sqrt{3}/2$, а длина отрезка KF, равного половине этой высоты,— $a\sqrt{3}/4$. Из подобия прямоугольных треугольников SKF и SOT (дополнительное построение очевидно) следует

$$\frac{OT}{SK-OK}=\frac{KF}{SF} \text{ или } \frac{3/8}{1-3/8}=\frac{a\sqrt{3}/4}{\sqrt{1+\frac{3a^2}{16}}}.$$

Отсюда находим, что $a=\sqrt{3}$.

Поскольку треугольник ABD — равносторонний, то $BD=\sqrt{3}$. Если на отрезке AK взять точку L такую, что $AL=4/5\,AK$, и провести через нее отрезок $MN\|BD$, то длина этого отрезка будет равна $4\sqrt{3}/5$. Совершенно очевидно, что если через получившиеся точки M и N провести плоскость, касательную к шару, то эта плоскость будет удовлетворять всем условиям задачи. Покажем, что такая плоскость единственная.

Пусть точки M' и N', лежащие на сторонах ромба AB и AD соответственно, таковы, что отрезок $M'N'$ равен $4\sqrt{3}/5$. Проведем через точки M' и N' плоскость, касающуюся шара в некоторой точке Q (на рис. 80 не обозначена), которая равноудалена от точек M' и N'. Тогда $M'Q=M'K$ и $N'Q=N'K$ как касательные к шару, проведенные из одной точки. Поскольку $M'Q=N'Q$, то $M'K=N'K$. Следовательно, и точка K должна быть равноудалена от точек M' и N', что, конечно, невозможно, если отрезок $M'N'$ непараллелен BD. Если же $M'N'\|BD$ и его длина равна $4\sqrt{3}/5$, то он должен совпадать с отрезком MN, и т. д.

Для нахождения длины отрезка SE обратимся к рис. 81, на котором вынесена плоскость треугольника ASC. Прямая PE представляет след искомой касательной плоскости на плоскости треугольника ASC. Имеем: $AK=a\sqrt{3}/2=3/2$; $LK=1/5\,AK=0{,}3$. Обозначим $KE=x$. Тогда $OP=3/8$, $OE=3/8+x$. Из подобия треугольников LKE и OPE получаем:

$$\frac{LK}{KE}=\frac{OP}{PE} \text{ или } \frac{0{,}3}{x}=\frac{3/8}{\sqrt{(3/8+x)^2-(3/8)^2}}.$$

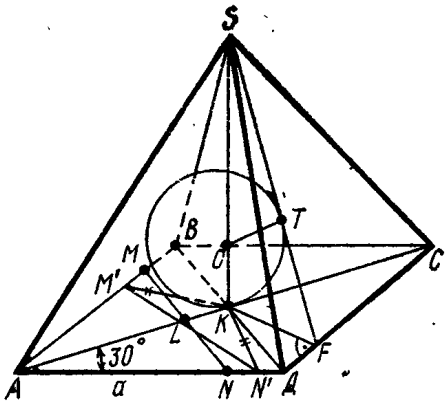


Рис. 80.

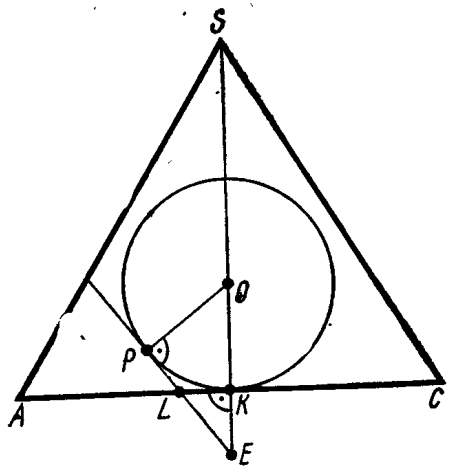


Рис. 81.

Из этого уравнения определяем величину x: $x=4/3$. После этого легко находится весь отрезок SE, который равен $7/3$.

Ответ: $7/3$.

Задача 5. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin 3x - \cos 2x - \frac{3}{10} = \sin 7x - \cos 6x - \frac{3}{10}, \\ \sin 3x - \cos 2x - \frac{3}{10} > 0, \\ -0{,}5 < x < 1{,}5. \end{cases}$$

Решим сначала уравнение этой системы. Имеем

$$\sin 7x - \sin 3x = \cos 6x - \cos 2x,$$

$$2 \sin 2x \cos 5x = -2 \sin 4x \sin 2x.$$

Отсюда находим

1) $\sin 2x = 0$; $x = \pi n/2$;

2) $\cos 5x + \sin 4x = 0$,

$$\cos 5x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) = 0,$$

$$2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{9x}{2}\right) = 0.$$

а) $\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$;

б) $\frac{9x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$; $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{9} k$.

Поскольку значения множества (а) входят в множество (1) имеем:

$$x = \frac{\pi n}{2}; \quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{9} k,$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, ; k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$.

Отберем из этих значений сначала те, которые удовлетворяют неравенству $-0{,}5<x<1{,}5$. Имеем

$$-0{,}5<\frac{\pi n}{2}<1{,}5,$$

$$-1<\pi n<3,$$

$$-\frac{1}{\pi}<n<\frac{3}{\pi}.$$

Отсюда ясно, что $n=0$. Далее находим

$$-0{,}5<\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{9}k<1{,}5,$$

$$-\frac{9}{\pi}<3+4k<\frac{27}{\pi},$$

$$-\frac{9+3\pi}{4\pi}<k<\frac{27-3\pi}{4\pi}.$$

Отсюда ясно, что $k=-1, 0, 1$. Таким образом, имеются четыре значения x: $x_1=0$, $x_2=-\pi/18$, $x_3=\pi/6$, $x_4=7\pi/18$. Осталось проверить выполнение неравенства $\sin 3x-\cos 2x-0{,}3>0$. Делается это непосредственной подстановкой найденных значений x в неравенство.

1) $x=0$; $\sin 0-\cos 0-0{,}3<0$.

Следовательно, $x=0$ не является решением.

2) $x=\pi/6$; $\sin\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{3}-0{,}3=1-0{,}5-0{,}3>0$.

Следовательно, $x=\pi/6$ есть решение задачи.

3) $x=-\pi/18$; $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\frac{\pi}{9}-0{,}3=-0{,}5-0{,}3-$

$-\cos\frac{\pi}{9}<0$.

Следовательно, $x=-\pi/18$ не является решением.

4) $x=7\pi/18$; $\sin(7\pi/6)-\cos(7\pi/9)-0{,}3=-0{,}5-0{,}3-$

$-\cos\frac{7\pi}{9}=\cos\frac{2\pi}{9}-0{,}8$.

Таким образом, необходимо без помощи таблиц сравнить числа $\cos(2\pi/9)$ и 0,8.

Число $2\pi/9$ соответствует углу $40°$. Поэтому для оценки $\cos 40°$ естественно рассмотреть углы $45°$ и $30°$, заключающие угол $40°$ между собой. Имеем

$$30°<40°<45°,$$

а поскольку в первой четверти косинус монотонно убывает, то

$$\cos 30°>\cos 40°>\cos 45°,$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}>\cos 40°>\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Однако такая оценка $\cos 40°$ оказывается слишком «грубой». Действительно, $\sqrt{3}/2 \simeq 0{,}86$, а $\sqrt{2}/2 \simeq 0{,}75$ и полученные оценки не дают возможности сравнить $\cos 40°$ с числом 0,8.

Найдем более близкие к 40° углы, ориентируясь на те из них, для которых без таблиц можно найти тригонометрические функции. Таким углом может быть угол 37,5°, который равен разности 60° и 22,5°. Имеем:

$$\cos \frac{2\pi}{9} - 0{,}8 < \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{8}\right) - 0{,}8.$$

Покажем, что правая часть этого неравенства отрицательная.

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{8}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\cos(\pi/8) + \sqrt{3}\sin(\pi/8)}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2};$$

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Тогда нужно сравнить числа

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4} \text{ и } 0{,}8.$$

Используя знак сравнения $\vee$, заменяющий знак $>$ или $<$, получим

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4} \vee \frac{4}{5}.$$

Возводя обе части этого неравенства в квадрат, имеем

$$\frac{4 - \sqrt{2} + \sqrt{6}}{8} \vee \frac{16}{25},$$

$$\sqrt{6} - \sqrt{2} \vee \frac{28}{25}.$$

Так как обе части последнего неравенства неотрицательны, то после их возведения в квадрат имеем:

$$8 - 2\sqrt{12} \vee \frac{784}{625},$$

$$3\frac{233}{625} \vee \sqrt{12}.$$

Очевидно, что $\sqrt{12} > 3{,}4$. Поэтому

$$3\frac{233}{625} < \sqrt{12}.$$

Таким образом, $\cos(\pi/3 - \pi/8) < 0{,}8$ и, значит, $\cos(2\pi/9) - 0{,}8 < 0$. Следовательно, $x = 7\pi/18$ не является решением уравнения.

Ответ: $x = \pi/6$.

§ 1. ГЕОГРАФИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, 1972 г.

II. 1. Брат нашел 32 гриба, сестра — 20 грибов.
2. $x_1=\pi/6$, $x_2=7\pi/6$. 3. $1<x<27$; $0<x<1/\sqrt{3}$.
4. $x=\sqrt{2}$, $y=2$.
5. $CM.=R(\sqrt{\sin^2\beta+\operatorname{ctg}^2\alpha}-\sin\beta)$.

III. 1. 24; 21. 2. $x_1=\pi/2$, $x_2=\pi/6$.
3. $1<x<32$; $0<x<1/2$. 4. $x=2$, $y=2$.
5. $AE=(a/2)\cdot\sqrt{\sin^2\beta/\sin^2\alpha+8}-\sin\beta/\sin\alpha)$.

IV. 1. 24; 20. 2. $x_1=\pi/3$, $x_2=4\pi/3$.
3. $1<x<5\sqrt{5}$; $0<x<1/5$. 4. $x=2$, $y=2$.
5. $BE=\sqrt{R^2\sin^2\alpha+(a-b)^2}-R\sin\alpha$.

§ 2. ГЕОГРАФИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, 1973 г.

II. 1. 5 *стр/ч*, 7 *стр/ч*. 2. 9.
4. $x=-3-\sqrt{9-20\log_6 2}$.
5. $x=\pi/3+\pi n$, $x=-\pi/4+\pi n$.

III. 1. 10 *км/ч*, 30 *км/ч*. 2. 11. 3. $D=2\sqrt{3}$.
4. $x=1+\sqrt{1+7\log_5 2}$. 5. $x=\pi n$.

IV. 1. 12 *км/ч*, 60 *км/ч*. 2. 25. 3. $R=\sqrt{5}$.
4. $x=3-\sqrt{9-3\log_2 3}$.
5. $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$.

---

* Там, где это не оговаривается особо, буквами m, n и k обозначаются целочисленные параметры, принимающие значения 0, ±1, ±2, ±3, ...

§ 3. ГЕОГРАФИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, 1974 г.

II. 1. 15 *т*. 2. $x_1 = \frac{1+2k}{10}\pi$; $x_2 = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n$.
3. $x = 3$, $y = 2$.
4. $S = a^2(24\sqrt{3} - 11\pi)/72$.
5. $x > 1{,}1$; $3/5 < x < 27/35$; $4/7 < x < 3/5$.

III. 1. 6 *км/ч*. 2. $x_1 = k\pi/3$; $x_2 = \pm 5\pi/12 + \pi n$.
3. $x = -2$, $y = -1$.
4. $S = a^2(7 - 4\sqrt{3})(5\pi/6 - \sqrt{3})/4$.
5. $0{,}2 < x < 0{,}25$; $1{,}75 < x < 2{,}25$; $-0{,}8 < x < -0{,}25$.

IV. 1. 30 *м²/ч*. 2. $x_1 = \pi(1+2k)/8$; $x_2 = \pm 3\pi/4 + 2\pi n$.
3. $x = 3$, $y = 1$.
4. $S = a^2(24\sqrt{3} - 11\pi)/648$.
5. $x < -2/5$; $x > 8/5$; $4/7 < x < 3/5$; $3/5 < x < 5/7$.

§ 4. ГЕОГРАФИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, 1975 г.

II. 1. 5. 2. $x = \pm\pi/3 + 2\pi m$. 3. $x = 1$.
4. $\sqrt{3}/(14\pi)$. 5. $x = 5\pi/6$, $y = 8 - 5\pi/2$.

III. 1. 8; 12. 2. $x = \pm\pi/3 + \pi m$.
3. $x = 4/3$. 4. $12/(25\pi)$.
5. $x = \pi/2$, $y = 5 - 3\pi/2$.

IV. 1. 40. 2. $x = \pm 2\pi/3 + 2\pi m$. 3. $x = 2$.
4. $4\sqrt{3}/(7\pi)$. 5. $x = 2\pi/3$, $y = 7 - 2\pi$.

§ 5. БИОЛОГО-ПОЧВЕННЫЙ ФАКУЛЬТЕТ, 1972 г.

II. 1. 6 *ч* 40 *мин*. 2. 8. 3. $x_1 = 9$, $x_2 = 1/81$.
4. $x = 6k + 1$. $k = 1, 2, 3 \ldots$.
5. $S_{\Delta ABE} = a^2 S/(a+c)(a+b-c)$.

III. 1. 2 *ч*. 2. 1. 3. $x = 1/3$.
4. $x = k/2$, $k = 1, 3, 4 \ldots$;
$x = m + 1/4$, $m = 0, 1, 2 \ldots$.
5. $(a+c)(b+c)(a+b+c)/ab(a+b+2c)$.

IV. 1. 14 *ч*. 2. -8. 3. $x_1 = 125$, $x_2 = 1/5$.
4. $x = 5\pi/6 + k\pi$, $x = \pi/4 + k\pi$, $k = 0, 1, 2 \ldots$.
5. $ab(3a - b)\sin 2\alpha/2(a+b)$.

§ 6. ФАКУЛЬТЕТ ПОЧВОВЕДЕНИЯ, 1973 г.

II. 1. 9 и 6. 2. Второе выражение больше, чем первое.
3. $x=-\pi/4+\pi n$, $x=(-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)+\frac{\pi}{4}+\pi n$.
4. $R=7$. 5. $x_1=7$, $x_2=1$.

III. 1. 90 и 120 *км/ч*. 2. Первое выражение больше, чем второе.
3. $x=\pi n$. 4. $R=3{,}2$. 5. $x=-1$.

IV. 1. 35 и 24 рубля. 2. Первое выражение больше, чем второе.
3. $x=\pm\pi/3+2\pi n$. 4. $R=2$. 5. $x=1/8$.

§ 7. БИОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, 1973 г.

II. 1. 5 *км/ч*. 2. $x=\pi/4+\pi n$, $x=-\pi/6+\pi n$.
3. $x=\pi n$. 4. $11\pi/12$. 5. $2<c\leqslant 3$.

III. 1. 5 *га*. 2. $x=\pm\pi/3+\pi n$.
3. $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$. 4. $S=4$. 5. $a\geqslant 1$.

IV. 1. 12 *ч*. 2. $x=\pi/4+\pi n/2$. 3. $x=\pi/2+\pi n$.
4. $DM=7$. 5. $0<c\leqslant 8$.

§ 8. ФАКУЛЬТЕТ ПОЧВОВЕДЕНИЯ, 1974 г.

II. 1. 150 *км*. 2. $x_1=2$, $x_2=8$. 3. $x=-\pi/6+2\pi k$.
4. $0{,}5<a<1$. 5. $S=3\sqrt{15}$.

III. 1. 120 $м^2$. 2. $x_1=9$; $x_2=1/3$.
3. $x=-\pi/2+2\pi n$. 4. $0<a<1/3$.

IV. 1. Экскаватор марки А—800 $м^3$, экскаватор марки Б—1200 $м^3$.
2. $x=2$. 3. $x=\pi/3+2k\pi$.
4. $a<-1/3$; $a>3$. 5. $R=5/6$.

§ 9. БИОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, 1974 г.

II. 1. 8 *ч* 32 *мин*. 2. $x=k\pi$; $x=\pi/4+\pi(2k+1)/2$.
3. $MK=a\sqrt{13}/6$. 4. $-2<x<-1$, $x\geqslant 0$.
5. $x=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$; $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$.

III. 1. 19 *ч* 00 *мин*. 2. $x=k\pi$; $x=-\pi/4+k\pi$.

3. $FM = a\sqrt{19}/15$. 4. $2 < x < 3$; $x > 6$.

5. $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + k\pi$; $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$.

IV. 1. 11 *ч* 55 *мин*. 2. $x = \pi(2k+1)/2$; $x = \pi/4 + k\pi$.

3. $MF = a\sqrt{17}/12$. 4. $x > 1$; $0 > x > -1$.

5. $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + k\pi$; $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$.

§ 10. ФАКУЛЬТЕТ ПОЧВОВЕДЕНИЯ, 1975 г.

II. 1. 16 дней. 2. $x = \pm\pi/4 + \pi n$. 3. $x_1 = 3/2$, $x_2 = 9/4$.

4. $S = 9\sqrt{8}/4$.

III. 1. 7,5 дней. 2. $x = \pm\pi/3 + \pi n$ 3. $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = 1/7$.

4. $S = 37{,}5$.

IV. 1. 45 *сек*. 2. $x = \pm\pi/6 + \pi n$. 3. $x_1 = 8/3$, $x_2 = 22/7$.

4. $S = 65\frac{1}{3}$.

§ 11. БИОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, 1975 г.

II. 1. 50 *км*. 2. $p = 1$. 3. $BK = 1$, $KD = 2$.

4. $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$,

$x = k\pi$.

5. $n = -2, -1, 0, 1, 2, \ldots 11$.

III. 1. 3 *т*. 2. $p = -0{,}5$. 3. $AB = 1$.

4. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x = k\pi$.

5. $n = 5, 6, 7$.

IV. 1. 65 деталей в час. 2. $p = 1$. 3. $AM = \frac{17}{4}$.

4. $x = \pi + 2k\pi$, $x = \pm\pi/2 + 2k\pi$, $x = \pm\pi/6 + 2k\pi$.

5. $n = -1, 0, 1, 2, 3, \ldots 13$.

§ 12. ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, ОТДЕЛЕНИЕ ОБЩЕЙ ГЕОЛОГИИ, 1972 г.

II. 1. $x = \pm 2\pi/3 + 2k\pi$. 2. $x = 4$, $y = 4$. 3. 12 $м^3/ч$.

4. $x < -3$. 5. $12\sqrt{5}$ $см^2$.

III. 1. $x=(-1)^{m+1}\frac{\pi}{6}+\pi m$. 2. $x=4$, $y=5$. 3. 6 *км/ч*.
4. $x<2$. 5. $5\sqrt{6}/2$ *см*².

VI. 1. $x=\pm 2\pi/3+2\pi m$. 2. $x=8$, $y=8$. 3. 15 *м*³/*ч*.
4. $x<-4$. 5. 15 *см*².

§ 13. ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, ОТДЕЛЕНИЕ ГЕОФИЗИКИ, 1972 г.

II. 1. 21 колхозник. 2. $x=\pm\pi/4+m\pi$.
3. $x<2$, $(3+\sqrt{5})/2<x<3$. 3. $32\sqrt{2}$ *см*².

III. 1. 10 книг. 2. $x=\pm\pi/3+\pi m$.
3. $x<1$, $(1+\sqrt{5})/2<x<2$. 4. $4\sqrt{5}$ *см*.

IV. 1. 14 карандашей. 2. $x=\pm\pi/6+\pi m$.
3. $x>2$, $-1<x<(5-\sqrt{13})/2$.
4. $4\sqrt{3}/3$ *см*. 5. $2\sqrt{3}$ *см*, $2\sqrt{3}/3$ *см*, $\sqrt{3}/2$ *см*.

§ 14. ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, ОТДЕЛЕНИЕ ОБЩЕЙ ГЕОЛОГИИ, 1973 г.

II. 1. $x=5$, $y=7$. 2. $x=0$. 3. 9 *км/ч*.

III. 1. $x=1/2$, $y=1/3$. 2. $x=1$. 3. 10 *игр/ч*.
4. $V=32\sqrt{3}$ *см*³. 5. (x_1, y_1), $(-x_1, y_1)$, $(x_1, \pi-y_1)$, $(-x_1, \pi-y_1)$, где $x_1=\arccos(\sqrt[3]{20}+\sqrt{3})$, $y_1=\arcsin 1/(\sqrt[3]{20}+\sqrt{3})$.

VI. 1. $x=1$, $y=1$. 2. $x=-1$. 3. 5 *м*³/*ч*.
4. $S=3\sqrt{2}$ *см*². 5. (x_1, y_1), $(x_1, \pi-y_1)$, $(\pi+x_1, y_1)$, $(\pi+x_1, \pi-y_1)$, где $x_1=\operatorname{arctg}(\sqrt[3]{41}-\sqrt{6})$, $y_1=\arcsin 1/(\sqrt[3]{41}+\sqrt{6})$.

§ 15. ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, ОТДЕЛЕНИЕ ГЕОФИЗИКИ, 1973 г.

II. 1. $x=2$, $y=\pi/4-2+k\pi$. 2. $x\leqslant 1$. 3. 9 *км/ч*.
4. $1<x<1{,}5$; $x\neq 1{,}25$. 5. $R=3/2$.

III. 1. $y=1$, $x=\pm\pi/3+1+2k\pi$. 2. $x>0$. 3. 10 *игр/ч*.

4. $1<x<3$, $x\neq 3/2$, $x\neq 2$. 5. $S=\pi\sqrt{3}$ *см*².

IV. 1. $y=2$, $x=\pi/4+2+k\pi$. 2. $x\leqslant -1$. 3. 5 *м*³/*ч*.
4. $-1/2<x<1/8$; $1/4<x<1$. 5. $R=3$ *см*.

§ 16. ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, ОТДЕЛЕНИЕ ОБЩЕЙ ГЕОЛОГИИ, 1974 г.

II. 1. $x=(5+\sqrt{41})/2$. 2. $x<0$, $\log_3 2<x<1$.
3. $x=\arccos\sqrt{4/7}+k\pi$; $k=0,\ 1,\ 2\ldots$. 4. $\varphi=\operatorname{arctg}(1/\cos\alpha)$.
5. $v_1/v_2=169/792$.

III. 1. $x=-(15+\sqrt{5})/2$. 2. $\log_2 2/\sqrt{3}<y<1$.
3. $x=\arccos(3/\sqrt{17})+k\pi$; $k=0,\ 1,\ 2\ldots$. 4. $l=\sqrt{10}/2$ *см*.
5. $v=7/32$ *см*³.

IV. 1. $x=(17+\sqrt{5})/2$. 2. $\log_7 5/7<x<\log_7 6/7$.
3. $x=\arccos\sqrt{3/5}+\pi k$; $k=0,\ 1,\ 2\ldots$. 4. $\sin\varphi=1/\sqrt{10}$.
5. $l=\sqrt{19/18}$ *см*.

§ 17. ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, ОТДЕЛЕНИЕ ГЕОФИЗИКИ, 1974 г.

II. 1. $x\leqslant -4$; $-2\leqslant x\leqslant -1$; $x\geqslant 1$.
2. $x_1=-2-\sqrt{5}$; $x_2=\sqrt{7/3}$.
3. $k=1$: $x=\operatorname{tg}[\pi(1-\sqrt{7})/4]$, $y=\cos[\pi(1+\sqrt{7})/4]$.
4. $v=4\pi/9$ *см*³. 5. $S=2/3$ *см*².

III. 1. $-3/2<x<-1$; $5/2<x<3$.
2. $x_1=(-5-\sqrt{193})/6$; $x_2=(-7+\sqrt{57})/2$.
3. $k=2$: $x=\cos(\pi^2/4)$, $y=\pm 1$.
4. $S_6=15\pi/4$ *см*². 5. $S=\sqrt{3}/4$ *см*².

IV. 1. $-9\leqslant x\leqslant -8$; $-2\leqslant x\leqslant -1$.
2. $x_1=(1+3\sqrt{5})/2$, $x_2=-(2+3\sqrt{2})/2$.
3. $k=1$: $x=\cos[(\sqrt{5}+1)\pi/4]$, $y=\operatorname{tg}[(\sqrt{5}-1)\pi/4]$.
4. $H=2(\sqrt{3}+3)$ *см*.
5. $S=8/15$ *см*².

§ 18. ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, ОТДЕЛЕНИЕ ОБЩЕЙ ГЕОЛОГИИ, 1975 г.

II. 1. $x=\pi n+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}$.

2. 4000 $м^3/ч$. 3. $-\frac{1}{3}<x<0$; $\frac{\sqrt[3]{10}-1}{3}<x<\frac{\sqrt[3]{100}-1}{3}$.

4. 1 $см^2$. 5. $4-\sqrt{4\sqrt{5}-8}<x\leqslant 5$.

III. 1. $x=\pm\pi/4+\pi n$. 2. 9 $км/ч$.

3. $-4<x<-3$, $\sqrt[3]{10}-4<x<\sqrt[3]{100}-4$.

4. 2 $см$. 5. $-7\leqslant x<-6+\sqrt{4\sqrt{5}-8}$.

IV. 1. $x=\pi n$. 2. 10 $м^3/ч$.

3. $0{,}5<x<1$, $(\sqrt[3]{10}+1)/2<x<(\sqrt[3]{100}+1)/2$.

4. $44\sqrt{2}/45$ $см^2$. 5. $6-\sqrt{4\sqrt{5}-8}<x\leqslant 7$.

§ 19. ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, ОТДЕЛЕНИЕ ГЕОФИЗИКИ, 1975 г.

II. 1. $x_1=-1$, $x_2=5$. 2. $x<0$, $7/8<x<1$.

3. $x=\pi/6$, $y=2\pi/3$; $x=5\pi/6$, $y=2\pi/3$.

4. $a^2\sqrt{6}/40$ $см^2$. 5. 1 $см$.

III. 1. $x_1=-2$, $x_2=0$. 2. $x<-2/3$, $-1/12<x<0$.

3. $x=\pi/6$, $y=\pi-\operatorname{arcctg}0{,}5$; $x=5\pi/6$, $y=\pi-\operatorname{arcctg}0{,}5$.

4. $2l/9$ $см$. 5. $a\sqrt{29}/8$ $см$.

IV 1. $x_1=-5$, $x_2=1$. 2. $x<-1$, $-1/8<x<0$.

3. $x=\pi/3$, $y=5\pi/6$; $x=2\pi/3$, $y=\pi/6$.

4. 2 $см^2$. 5. $8(10-7\sqrt{2})$ $см^2$.

§ 20. ХИМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, 1972 г.

II. 1. 1 $км/ч$. 2. $x=1$. 3. 45°, 45°, 90°.

4. $S=4R^2\sqrt{2}|\sin\alpha$.

5. $2\pi m<x<\pi/3+2\pi m$, $\pi/2+2\pi m<x<2\pi/3+2\pi m$,
$4\pi/3+2\pi m<x<3\pi/2+2\pi m$,
$5\pi/3+2\pi m<x<2\pi(1+m)$.

III. 1. 2 $км/ч$. 2. $x=16$. 3. 4/3.

4. $(4ab\sin\alpha/2)/9$.
5. $\pi/4+2\pi m<x<3\pi/4+2\pi m$,
$\pi(1+2m)<x<5\pi/4+2\pi m$,
$7\pi/4+2\pi m<x<2\pi(1+m)$.

IV. 1. 3 *км/ч*. 2. $x=2$. 3. $1/3$. 4. $7a^2\sqrt{17}/24$.
5. $2\pi m\leqslant x\leqslant\pi/4+2\pi m$, $\pi/2+2\pi m<x<3\pi/4+2\pi m$,
$5\pi/4+2\pi m<x<3\pi/2+2\pi m$,
$7\pi/4+2\pi m<x<2\pi(1+m)$.

§ 21. ХИМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, 1973 г.

II. 1. 2 *л*. 3. $x=\pi/6$. 4. $V=243\sqrt{3}$, $\alpha=2\arcsin\sqrt{7/5}$.
5. $\alpha=\operatorname{arctg}3$, $\beta=\operatorname{arctg}(1/3)$.

III. 1. 60 *руб*., 90 *руб*. 2. $x\geqslant 2$. $0<x\leqslant 1$.
3. $x=0$, $x=\pm\sqrt{3}$. 4. $S=3\sqrt{15}(\sqrt{5}+1)^2$, $\alpha=2\arcsin\sqrt{2/5}$.
5. $\alpha=2\arcsin(3/5)$, $\beta=\pi/2-\alpha/2$.

IV. 1. 60 *км/ч*, 90 *км/ч*. 2. $x>\log_2 14$, $\log_2 5<x<3$.
3. $x=\pm\pi/3$. 4. $S=96$, $\alpha=2\arcsin(\sqrt{5}/3)$.
5. $\alpha=\operatorname{arctg}2$, $\beta=\operatorname{arctg}(1/2)$.

§ 22. ХИМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, 1974 г.

II. 1. $x=\pi/6+2k\pi$. 2. Верно. 3. $\alpha=5\sqrt{13}/12$.
4. Билет в цирк стоит 1 *руб*, билет в кино — 20 *коп*.
5. $R=Hr/(r+\sqrt{r^2+4H^2})$.

III. 1. $x=-\pi/3+k\pi$. 2. Неверно. 3. $\alpha=\sqrt{2-\sqrt{3}}$.
4. 30 *коп*., 10 *коп*. 5. $r=a\operatorname{tg}\alpha/(2+2\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2\alpha})$.

IV. 1. $x=\pi k$. 2. Неверно. 3. $r=\sqrt{2}$.
4. 20 *коп*., 10 *коп*. 5. $r=R\cos(\alpha/2)\cos\beta/(1+\sin\beta)$.

§ 23. ХИМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, 1975 г.

II. 1. $-1\leqslant x<8$. 2. Команда B забила в третьем периоде на две шайбы больше, чем команда A во втором периоде.
3. $(7+4\sqrt{7})/9$. 4. $a/(2\sqrt{3}\cdot\sin\beta/2)$.
5. $6m\pi<a<3(2m+1)\pi$, $m=0,\ 1,\ 2\ldots$.

III. 1. $0 \leqslant x < 1/4$. 2. Число книг, сданных в понедельник на 39 больше, чем число книг, выданных в среду.

3. $128(3+2\sqrt{2})/49$. 4. $r=\sqrt{3/2}$.

5. $3\pi/2+6m\pi < b \leqslant 3\pi/2+3(2m+1)\pi$, $m=0, 1, 2\ldots$.

IV. 1. $0 \leqslant x < 4$. 2. Январская добыча второй шахты больше январской добычи первой шахты на 3100 т.

3. $9(11+4\sqrt{6})/50$. 4. $R^2\sqrt{3}/2\sqrt{2}$.

5. $2m\pi < a \leqslant (2m+1)\pi$, $m=0,1, 2\ldots$.

§ 24. ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, 1972 г.

II. 1. $x=\pi n$, $x=\pm\pi/9+2\pi n/3$. 2. $x < (\log_3 4)/2$.

3. 49 *км/ч*, 35 *км/ч*. 4. $(5-\sqrt{7})\,a/4$. 5. $\sqrt{3}$.

III. 1. $x=\pi n/2$, $x=\pm\pi/3+\pi n$. 2. 0, $1 < x < 1$.

3. 1, 2 *кг*; 2,4 *кг*. 4. $2(1+\sqrt{2/3})$. 5. $1:\sqrt{3}$.

IV. 1. $x=\pi+2\pi n$, $x=\pm 4\pi/3+4\pi n$. 2. $x < (\log_2 3)/2$.

3. 8 *км/ч*, 4*км/ч*. 4. $(7-\sqrt{15})\,a/4$. 5. $1:\sqrt{3}$.

V. 1. $x=\pi/4+\pi n/2$, $x=-\pi/2+2\pi n$, $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$.

2. $1 < x < 10\,000$. 3. 70°, 2 *л*. 4. $2R\cos(\alpha/2)/\sqrt{3-4\sin^2(\alpha/2)}$.

5. $\pi/4$.

VI. 1. $x=4\pi n/3$, $x=2\pi/5+4\pi n/5$. 2. $1/100 < x < 10$.

3. 60 *км/ч*, 65 *км/ч*. 4. $(5-\sqrt{7})\,a/4$. 5. 3.

§ 25. ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, 1973 г.

II. 1. $x=\pi k$, $x=\pm 2\pi/3+2\pi k$. 2. $x=0$.

3. $q=1$, $q=7$. 4. $(2\sqrt{3}-3)/2$. 5. $R/\sqrt{2}$.

III. 1. $x=\pi/2+\pi n$, $x=(-1)^n\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)+\pi n$.

2. $x=\pm 1$. 3. -10 (возможно и $d=0$).

4. $5\pi/12$. 5. $3R/2\sqrt{2}$.

IV. 1. $x=\pi n$, $x=\pi/2+2\pi n$. 2. $-4/3$.

3. 2 (возможно и $62/5$ при $d=0$). 4. $\pi(4\sqrt{3}-3)/13$.

5. $\arccos(25/28)$.

V. 1. $x=\pi/2+\pi n$, $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$. 2. $\log_2 8$; 3.

3. 100, 20, 4 (возможно и 124/3, 124/3, 124/3).

4. $\pi/2$. 5. $r\sqrt{10}/4$.

VI. 1. $x=\pi/2+\pi n$, $x=\pm\pi/6+2\pi n$. 2. $x=1$, $x=3$.

3. $\frac{40(\sqrt[3]{9}-1)}{\sqrt[3]{9^4}-1}$, $\frac{40(\sqrt[3]{9}-1)\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{9^4}-1}$, 10, 10.

§ 26. ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, 1974 г.

II. 1. $x=\pi/3+\pi n$, $x=\pi n$. 2. $1-\sqrt{3}<x<1+\sqrt{3}$.

3. $x_1=2^{-8}$, $x_2=2^{27}$. 4. $(2-\sqrt{3})/\sqrt{5}$. 5. $a^3\sqrt{2}/54$.

III. 1. $x=2\operatorname{arcctg}(1/2)+2\pi n$. 2. $x<-1-\sqrt{2}$, $x>1+\sqrt{2}$.

3. $x_1=3^{3^{\frac{2}{3}}}$, $x_2=3^{2^{\frac{2}{3}}}$.

4. $\operatorname{ctg}(\alpha/2)\sqrt{R^2+b^2-2Rb\cos(\alpha/2)}$. 5. $a^3/18$.

IV. 1. $x=\pi/4+\pi n$, $x=\pi/2+\pi n$. 2. $2<x<3$.

3. $x_1=3^{3^{\frac{2}{3}}}$, $x_2=3$.

4. $\sqrt{b^2-a^2}/2\cos(\alpha/2)$. 5. $a^3\sqrt{3}/54$.

§ 27. ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, 1975 г.

II. 1. $x=-2/5+\pi m/5$. 2. $x=3$.

3. $3/7<x<\log_3 2$, $x>1$. 4. $8\sqrt{11}b^2/5$.

5. $a\sqrt{137/12}$.

III. 1. $x=4+\pi/2+\pi m$, $x=-3/2+(-1)^m\pi/12+\pi m/2$.

2. $x_1=-3$, $x_2=4$. 3. $-5<x<0{,}6$; $x>\log_3 2$.

4. $75\sqrt{7}a^2/16$. 5. $m\sqrt{265/108}$.

IV. 1. $x=4+\pi m$. 2. $x=0$.

3. $-2<x<\log_2 5$, $x>7/3$. 4. $5\sqrt{11}m^2/7$.

5. $b\sqrt{277}$.

§ 28. ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ, 1972 г.

II. 1. $x=-1\pm\sqrt{1-\log_2(3-\sqrt{2})}$.

2. $\pi(2n-1)\leqslant x\leqslant 2\pi n$; $\pi/4+2\pi n\leqslant x\leqslant 3\pi/4+2\pi n$.

3. $a/r=(\sqrt{5}+\sqrt{2})(3+\sqrt{5})/6\sqrt{2}$. 4. $\operatorname{arctg}(1/2\sqrt{3})$.

5. $a=-2\operatorname{ctg}^2 1\,(1+2\operatorname{ctg} 1)$, $x=0$;
$a=2$, $x=\pm\arccos(-\pi/4)$, $x=2\pi-\arccos(-\pi/4)$,
$x=\arccos(-\pi/4)-2\pi$.

III. 1. $x=-2\pm\sqrt{\log_3[3(3+\sqrt{2})/5]}$.
2. $\pi/2+\pi n<x<\pi(n+1)$, $\pi n<\leqslant\pi/4+\pi n$.
3. $r_1/r_2=(7+2\sqrt{6})/6$. 4. $\operatorname{arctg}(2\sqrt{2}-\sqrt{3})$.
5. $a=(\operatorname{tg}^2 1+2)/2\cdot(2\operatorname{tg} 1-1)$, $x=0$, $x=\pm 2\pi$;
$a=-0{,}5$, $x=\pm\sqrt{4\pi^2-\arccos^2(-\pi/4)}$,
$x=\pm\sqrt{4\pi^2-[2\pi-\arccos(-\pi/4)]^2}$.

IV. 1. $x=2\pm\sqrt{\log_3(4+2\sqrt{3})}$.
2. $2\pi n+\pi/2\leqslant x\leqslant 2\pi n+3\pi/2$,
$2\pi n-\pi/3\leqslant x\leqslant\pi/3+2\pi n$.
3. $r_2/r_3=(50-31\sqrt{2})/4$. 4. $\operatorname{arctg}\sqrt{2/5}$.
5. $a=\operatorname{ctg}^2 1/(1+2\operatorname{ctg} 1)$, $x=\pi/2$, $x=-3\pi/2$;
$a=-1$, $x=-\arcsin(\pi/4)$, $x=\pm\pi+\arcsin(\pi/4)$,
$x=2\pi-\arcsin(\pi/4)$.

§ 29. ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ, 1973 г.

II. 1. $x=-\pi/4+\pi m$, $y=\pi/2+2\pi k$;
$x=\pi/4+\pi m$, $y=-\pi/2+2\pi k$.
2. $0{,}58<x\leqslant 7+4\sqrt{3}$. 3. $S=(a^2+a\sqrt{a^2+8b^2})/4$.
4. 1, $\sqrt{2}/3$, $1/\sqrt{2}$. 5. Треугольник ABC — тупоугольный.

III. 2. $0{,}31\leqslant x<5+2\sqrt{6}$. 3. $S=a^2b^2/(2a^2-b^2)$.
4. $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$. 5. Угол ABC — острый.

IV. 1. $x=-\pi/4+\pi m$, $y=2\pi k$; $x=\pi/4+\pi m$,
$y=\pi+2\pi k$. 2. $0{,}32<x\leqslant 8+3\sqrt{7}$.
3. $S=a^2b/(2a-b)$. 4. $5/2$, $7/3$, $8/3$.
5. Угол ABC — острый.

§ 30. ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ, 1974 г.

II. 1. $x=5\pi/4-1$. 2. $-3/2\sqrt{5}\leqslant a\leqslant 3/2\sqrt{5}$.
3. $x=-2$, $x\geqslant 4\frac{1}{139}$. 4. 3500 т, 4800 т.

5. $3\sqrt{5/2}$.

III. 1. $x=9\pi/4-1$. 2. $a\leqslant -2\sqrt{7/3}$, $a\geqslant 2\sqrt{7/3}$.

3. $x=2$, $-3\leqslant x\leqslant -2\frac{135}{137}$. 4. 3 *т*, 9 *т*.

5. $2\sqrt{21}$ *см*.

IV. 1. $x=2\pi-1/2$. 2. $-\sqrt{2/15}\leqslant a\leqslant\sqrt{2/15}$.

3. $x=2$, $x\leqslant -3\frac{2}{197}$. 4. $30V$, $48V$. 5. 2 *см*.

§ 31. ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ, 1975 г.

II. 1. $x\leqslant -1$, $0\leqslant x<(5+\sqrt{13})/6$.

2. $x=-5/2$, $y=\pm\arcsin\sqrt{5/6}+\pi n$;

$x=-5/2$, $y=\pm\arcsin\sqrt{5/6-\pi/4}+\pi n$.

3. $a\sqrt{b}/(\sqrt{a}+\sqrt{b})$, $b\sqrt{a}/(\sqrt{a}+\sqrt{b})$.

4. 4200 пар. 5. $a/2\sqrt{2}$.

III. 1. $(5-\sqrt{45})/10<x\leqslant 2$.

2. $x=\pm\arccos\sqrt{1/5}+\pi n$, $y=1/3+\pi/24$;

$x=\pm\arccos\sqrt{1/5+\pi/5}+\pi n$, $y=1/3+3\pi/4$.

3. $c-l\pm\sqrt{c^2-2cl}$. 4. 600 *км/ч*. 5. $\sqrt{3}\operatorname{tg}40°$.

IV. 1. $x\leqslant -5$, $1\leqslant x<(8+\sqrt{22})/3$.

2. $x=-2/7$, $y=\pm\arcsin 2/\sqrt{7}+\pi n$,

$x=-2/7-3\pi/7$, $y=\pm\arcsin\sqrt{(4-\pi)/7}+\pi n$.

3. $(d\pm\sqrt{d^2-c^2})2$. 4. 42 *т*. 5. $2\sqrt{3}r^2$.

§ 32. МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, 1972 г.

II. 1. $5/12<x\leqslant 1/2$. 2. $v=3$ *км/ч*.

3. $R=2\sqrt{3}$ *м*. 4. $\sqrt{3}$ *м*^{2}.

III. 1. $0<x\leqslant 4/5$, $x=2$. 2. 21 *км*. 3. $4\sqrt{2}/3$ *м*.

4. $18\sqrt{2}$ *м*^{3}. 5. $a=-2$, $b=20$, $c=4$.

IV. 1. $1/3\leqslant x<2/3$. 2. $x=8$ *км*. 3. $\sqrt{3}$ *м*.

4. $2\sqrt{39}$ *м*^{3}. 5. $r=1$, $p=1$, $q=0$.

II. 2. $S=8$. 3. $1/2<x\leqslant 3/2$.
4. $V=ab^2\sin\alpha\cos\alpha/3$. 5. $x=-0{,}5$, $y=-1$.

III. 1. $x=\pi/6+\pi k$. 2. $S=4\sqrt{3}/3$.
4. $V=8S^2\sin\alpha\sin\beta/3a\sin(\alpha+\beta)$.
5. $x=-2$, $y=3/2$; $x=0$, $y=-0{,}5$.

IV. 1. $x=2\pi m$, $x=-\pi/3+2\pi m$. 2. $S=15\sqrt{3}$.
3. $5/2<x\leqslant 3$. 4. $S=\sqrt{4q^2+p^2/2}$. 5. $x=1$, $y=-1$.

I. 1. $x=2\pi n-\pi/2$; $x=(2k+1)\pi$. 2. $-1\leqslant x\leqslant 3$, $x\neq 1$.
3. $S_{ABC}=9\sqrt{3}/4$. 4. $V_{AECD}=36$. 5. $\alpha=100$.

III. 1. $x=2\pi n+\pi/2$; $x=2\pi n+\pi$.
2. $1-\sqrt{3/2}\leqslant x\leqslant 1+\sqrt{3/2}$; $x\neq 1$.
3. $AC=3$. 4. $V_{ABCD}=450$. 5. $\alpha=99$.

IV. 1. $x=-\pi/4+2\pi k$. 2. $1<x<3$, $x\neq 2$.
3. $S_{ABC}=16\sqrt{2}$. 4. $V_{ABCD}=9\sqrt{3}/8$. 5. $\alpha=100$.

II. 1. $x\leqslant -3$, $x\geqslant -1$. 2. $x=\pm 1$, $y=1$; $x=\pm 2$, $y=0$.
3. $^1/_2(\alpha-\beta)$. 4. $SD=9$. 5. $x_1=-9\pi/10$, $x_2=-7\pi/6$.

III. 1. $-8\leqslant x\leqslant 2$. 2. $x=-\sqrt{2\pi}/2$, $y=\pm\sqrt{2\pi}/2$;
$x=-\sqrt{2\pi}/4$, $y=\pm\sqrt{14\pi}/4$. 3. $(\alpha-\beta)/(\alpha+\beta)$.
4. $10\frac{13}{41}$. 5. $x=-11\pi/18$.

IV. 1. $x\leqslant -2$, $x\geqslant 4$. 2. $x=\pm\sqrt{3}/2$. $y=-0{,}5$;
$x=\pm\sqrt{2}$, $y=0$. 3. $(\alpha+\beta)/2$. 4. $6\frac{12}{13}$.
5. $x_1=-\pi/2$, $x_2=-\pi/6$, $x_3=-7\pi/18$.